

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE AUTOMAÇÃO E SISTEMAS**

Tito Luís Maia Santos

**CONTRIBUIÇÕES PARA O CONTROLE PREDITIVO COM
COMPENSAÇÃO DE ATRASO ROBUSTA**

Florianópolis

2011

Tito Luís Maia Santos

**CONTRIBUIÇÕES PARA O CONTROLE PREDITIVO COM
COMPENSAÇÃO DE ATRASO ROBUSTA**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação
em Engenharia de Automação e Sistemas
para a obtenção do Grau de Doutor em En-
genharia de Automação e Sistemas.
Orientador: Prof. Dr. Julio Elias Normey-
Rico

Florianópolis

2011

Catálogo na fonte elaborada pela biblioteca da
Universidade Federal de Santa Catarina

A ficha catalográfica é confeccionada pela Biblioteca Central.

Tamanho: 7cm x 12 cm

Fonte: Times New Roman 9,5

Maiores informações em:

<http://www.bu.ufsc.br/design/Catalogacao.html>

Tito Luís Maia Santos

CONTRIBUIÇÕES PARA O CONTROLE PREDITIVO COM COMPENSAÇÃO DE ATRASO ROBUSTA

Esta Tese foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Doutor em Engenharia de Automação e Sistemas”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas.

Florianópolis, 7 de julho 2011.

Prof. Chefe, Dr. José Eduardo Cury
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Julio Elias Normey-Rico
Presidente

Prof. Dr. Julio Elias Normey-Rico
Orientador

Prof. Dr. Carlos Eduardo Trabuco Dórea

Prof. Dr. Alejandro Hernan González

Prof. Dr. Eugênio de Bona Castelan Neto

Prof. Dr. Ubirajara Franco Moreno

Prof. Dr. Martín Jorge Pomar García

Para Tico, Duca e Malu

AGRADECIMENTOS

A Deus pela saúde e pela oportunidade de pertencer a uma família maravilhosa.

Aos meus pais para os quais devo sempre expressar minha gratidão diante de tanta dedicação e amor.

À minha irmã, que merece destaque pelo carinho e atenção que me dedica.

Aos meus avós, tios e primos que sempre me apoiaram durante toda minha vida.

Ao pessoal do "sindicato do LCMI", uma turma realmente especial com a qual tive a sorte e o prazer de conviver.

A Douglas, Jéssica e Tahim por me aturarem durante este período maravilhoso.

A Gabi pela companhia ao longo desta jornada.

Aos professores do DAS, especialmente ao meu orientador, Prof. Julio Normey-Rico, pela orientação, pela amizade e por toda sua ajuda.

Ao meu orientador espanhol, Prof. Daniel Limón, pela oportunidade de estagiar na Espanha, pela orientação ao longo do doutorado e por toda atenção que me foi dedicada.

Aos grandes amigos que fiz na Espanha.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo auxílio financeiro.

RESUMO

Algoritmos de controle preditivo baseado em modelo se destacam pela capacidade de lidar com aspectos relevantes, os quais estão presentes em grande parte dos problemas de controle avançado. Entre estes aspectos pode-se ressaltar a capacidade de tratar restrições nas variáveis envolvidas e a possibilidade de lidar, de forma natural, com sistemas não lineares, sistemas multivariáveis e processos com atraso.

Particularmente com relação ao efeito do atraso, este é tratado implicitamente devido à utilização de previsões e à obtenção do sinal de controle que otimiza um critério baseado nestas previsões. Desta forma, a compensação do atraso é realizada no contexto do problema de otimização. No entanto, o atraso pode dificultar a obtenção de elementos que garantem estabilidade e/ou robustez. Além disso, sabe-se que estratégias tradicionais como o GPC (do inglês *Generalized Predictive Control*) e o DMC (do inglês *Dynamic Matrix Control*) apresentam problemas de robustez que estão relacionados ao tamanho do atraso.

Neste trabalho será considerado o problema da compensação de atraso robusta para controladores preditivos. O principal objetivo é discutir a maneira pela qual o atraso afeta a robustez no contexto de controladores preditivos para sistemas lineares com atraso e restrições. Desta maneira, é possível garantir estabilidade e satisfação robusta de restrições para um sistema com atraso, utilizando estratégias de controle preditivo baseadas em modelos sem atraso.

Palavras-chave: Controle Preditivo, Sistemas com Atraso, Estabilidade e Robustez

ABSTRACT

Model based predictive control algorithms are important due to their capability to deal with relevant aspects that appear in several advanced control problems. Among these aspects, it is possible to highlight their to consider constraints and to deal with multivariable, non-linear and processes with time delay in a natural manner.

In particular, in the case of processes with time delay, its effect is naturally treated due to the predictions which are considered in the optimization criterion. Hence, delay compensation is performed in the optimization problem context. However, the delay may cause some problems in order to define some elements used to guarantee stability and/or robustness. Moreover, it is known that traditional MPC strategies such as Generalized Predictive Control (GPC) and Dynamic Matrix Control (DMC) presents some robustness problem that are related with time delay length.

In this Thesis, the problem of robust delay compensation for MPC will be considered. The main objective is to analyze delay effect in robustness in MPC strategies for constrained linear systems with time delay. In this case, it is possible to guarantee stability and robust constraint satisfaction for MPC strategies based on models without time-delay.

Keywords: Predictive Control, Time-Delay Systems, Stability and Robustness.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Resposta obtida para $\mathbf{G}_-(s)$.	31
Figura 2	Resposta obtida para $\mathbf{G}_+(s)$.	32
Figura 3	Resposta para o caso sem incerteza $\delta L = 0$.	37
Figura 4	Resposta para o caso com incerteza $\delta L = 0.4$.	38
Figura 5	Representação de um sistema de controle com atraso.	44
Figura 6	Resposta em frequência do sistema com um controlador PI para diferentes atrasos e ajustes.	45
Figura 7	Resposta ao degrau em malha fechada do sistema com um controlador PI para diferentes atrasos e ajustes.	46
Figura 8	Representação de um sistema de controle com atraso ideal.	46
Figura 9	Representação do preditor de malha aberta.	47
Figura 10	Estrutura do preditor de Smith.	47
Figura 11	Estrutura do preditor de Smith filtrado.	48
Figura 12	Estrutura de implementação do preditor de Smith filtrado.	49
Figura 13	Diagrama polar para análise de robustez.	50
Figura 14	Resposta em frequência do filtro de robustez para diferentes valores de β .	51
Figura 15	Resposta em frequência do filtro de robustez para diferentes valores de z_f .	54
Figura 16	Resposta em frequência do novo filtro de robustez para diferentes escolhas de α .	59
Figura 17	Resposta em frequência do novo filtro de robustez para escolhas distintas de z_f .	60
Figura 18	Estrutura de controle do preditor generalizado.	63
Figura 19	Resposta em frequência do filtro de robustez para diferentes escolhas de λ do filtro $F_k(z)$.	65
Figura 20	Comparação do filtro de robustez.	67
Figura 21	Comparação de desempenho: caso nominal com perturbação.	68
Figura 22	Comparação de desempenho: caso com erro de estimação no atraso e perturbação.	69
Figura 23	Comparação de desempenho: caso nominal com ruído.	69
Figura 24	Estrutura de controle preditivo com compensação de atraso explícita.	73

Figura 25 Detalhe da estrutura do Preditor de Smith filtrado multivariável.....	81
Figura 26 Estrutura MPC com compensador de atraso robusto.	81
Figura 27 Diagrama do controlador MPC sem restrições para sistemas com atraso	85
Figura 28 Resposta da saída e do controle, $N^{DTCGPC} = 50$	89
Figura 29 Resposta da saída e do controle, $N^{DTCGPC} = 20$	89
Figura 30 Resposta da saída e do controle para o CPCAPT com $\beta_1 = \beta_2 = 0$	90
Figura 31 Resposta da saída e do controle para o CPCAPT com $\beta_1 = \beta_2 = 0.9$	90
Figura 32 Diagrama de um sistema de controle com estrutura de compensação de atraso.	92
Figura 33 Diagrama de equivalente de um sistema de controle com a utilização do preditor ótimo.	101
Figura 34 Resposta para o sistema estável: caso nominal ($\delta k_p = 0$, $\delta d = 0$) - acima, caso com incerteza ($\delta k_p = 2$, $\delta d = 2$) - abaixo.....	103
Figura 35 Resposta para o sistema estável: caso nominal ($\delta k_p = 0$, $\delta d = 0$) - acima, caso com incerteza ($\delta k_p = 0.5$, $\delta d = 1$) - abaixo.....	104
Figura 36 Esquema de controle com estimação de estados e compensação de atraso.	108
Figura 37 Evolução dos estados com o controle linear: $d = 2$ acima e $d = 3$ abaixo.	118
Figura 38 Evolução dos estados com o algoritmo MPC: $d = 2$ acima e $d = 3$ abaixo.	119
Figura 39 Resposta da coluna de destilação tipo Wood-Berry com o modelo nominal.	137
Figura 40 Resposta da coluna de destilação tipo Wood-Berry com incerteza no modelo	138
Figura 41 Desenho esquemático de um laço do campo solar e imagem do campo real	140
Figura 42 Perturbações mensuráveis reais	146
Figura 43 Simulações com perturbações obtidas num dia ensolarado. ...	149
Figura 44 Representação esquemática simplificada do sistema de aquecimento.....	153
Figura 45 Comparação das saídas para o controlador com o preditor ótimo e com o preditor de Smith filtrado.	157

Figura 46 Comparação do sinal de controle para os esquemas com o preditor ótimo e com o preditor de Smith filtrado..... 158

Figura 47 Comparação da perturbação aditiva para os esquemas com o preditor ótimo e com o preditor de Smith filtrado..... 159

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Parâmetros do processo	141
Tabela 2	Parâmetros de sintonia	147

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MPC	Do inglês <i>Model Predictive Control</i>	27
LQR	Do inglês <i>Linear Quadratic Regulator</i>	29
LQG	Do inglês <i>Linear Quadratic Gaussian</i>	29
GPC	Do inglês <i>Generalized Predictive Control</i>	36
DMC	Do inglês <i>Dynamic Matrix Control</i>	36
PS	Preditor de Smith	36
LMI	Do inglês <i>Linear Matrix Inequality</i>	38
PI	Controlador Proporcional-Integral	44
BIBO	Do inglês <i>Bounded-Input Bounded-Output</i>	52
PG	Preditor Generalizado	67
PSF	Preditor de Smith Filtrado	67
LMFD	Do inglês <i>Left Matrix Fraction Description</i>	76
SISO	Do inglês <i>Single-Input Single-Output</i>	78
CPCAPT	Controlador Preditivo com Compensação de Atraso e Ponderação Terminal	86
DTCGPC	Do inglês <i>Dead-time Compensator Generalized Predictive Controller</i>	86
ARX	Do inglês <i>Auto-regressive model with exogenous input</i>	96
ISS	Do inglês <i>Input-to-state stability</i>	105
mrpi	minimal robust positively invariant set	107
SPGPC	Do inglês <i>Smith Predictor Generalized Predictive Controller</i>	135
CPP	Controlador Preditivo Prático	139
NEPSAC	Do inglês <i>Non-linear Extended Prediction Self-Adaptive Control</i>	147
FL-GPC	Do inglês <i>Feedback Linearization Generalized Predictive Control</i>	148

LISTA DE SÍMBOLOS

$x(j k)$	Predição para a variável $x(j)$ com $j > k$, dadas as informações conhecidas no instante k	29
x	Vetor de dimensões apropriadas	29
A	Matriz de dimensões apropriadas	29
s	Operador da Transformada de Laplace	30
$F(s)$	Função de transferência	30
$\mathbf{F}(s)$	Matriz de transferência de dimensões apropriadas	30
$\ v\ _Q$	Norma euclidiana ponderada do vetor v : $\ v\ _Q \triangleq \sqrt{v'Qv}$	30
$\Delta x(k)$	O operador de incremento sobre um dado sinal $x(k)$: $\Delta x(k) \triangleq x(k) - x(k-1)$	30
\mathbb{R}^n	Espaço dos vetores reais de dimensão n	32
z	Operador de avanço discreto (<i>forward-shift operator</i>)	49
$F(z)$	Matriz de transferência pulsada em z	49
z^{-1}	Operador de atraso discreto (<i>backward-shift operator</i>)	63
$F(z^{-1})$	Matriz de transferência pulsada em z^{-1}	63
$\mathbf{F}(z^{-1})$	Matriz de transferência pulsada com dimensões apropriadas	76
I	Matriz identidade de dimensões apropriadas	76
I_n	Matriz identidade de dimensão $n \times n$	76
$M\mathbb{V}$	Mapeamento de um conjunto: dada uma matriz $M \in \mathbb{R}^{n,m}$ e um conjunto $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^m$, $M\mathbb{V} = \{Mv \mid v \in \mathbb{V}\} \subset \mathbb{R}^n$	99
$\mathbb{U} \oplus \mathbb{V}$	Soma de Minkowski: dados dois conjuntos $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$ e $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^m$, $\mathbb{U} \oplus \mathbb{V} \triangleq \{u+v \mid u \in \mathbb{U}, v \in \mathbb{V}\}$	100
$\mathbb{U} \ominus \mathbb{V}$	Diferença de Pontryagin: dados dois conjuntos $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$ e $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{U} \ominus \mathbb{V} \triangleq \{u \mid u \oplus \mathbb{V} \in \mathbb{U}, u \in \mathbb{U}, v \in \mathbb{V}\}$	100
\mathbb{R}^+	Espaço dos números reais não negativos	187

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	27
1.1 MOTIVAÇÃO	29
1.1.1 Otimalidade não implica estabilidade	29
1.1.2 Garantia de estabilidade em controladores preditivos	31
1.1.2.1 Casos lineares e efeito do atraso	34
1.1.3 Robustez dos controladores preditivos para sistemas com atraso	36
1.2 LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO	37
1.3 OBJETIVO	40
1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	41
2 PREDIÇÃO PARA CONTROLE	43
2.1 COMPENSAÇÃO DE ATRASO	43
2.2 PREDITOR DE SMITH	45
2.3 PREDITOR DE SMITH FILTRADO	48
2.4 PREDITOR DE SMITH FILTRADO PARA PLANTAS INTEGRADORAS E INSTÁVEIS	52
2.4.1 Problemática	52
2.4.2 Projeto alternativo do filtro de robustez.	53
2.4.3 Comportamento do zero de cancelamento.	56
2.4.3.1 Processos integradores ($a = 1$)	57
2.4.3.2 Processos instáveis ($ a > 1$)	57
2.4.3.3 Processos Estáveis ($ a < 1$)	57
2.4.3.4 Procedimento de sintonia	58
2.5 PREDITOR ÓTIMO	60
2.5.1 Preditor Generalizado	62
2.6 COMPARAÇÃO ENTRE ESQUEMAS DE PREDIÇÃO	64
2.6.1 Exemplo de simulação	65
2.7 CONCLUSÕES	67
3 COMPENSAÇÃO DE ATRASO EM CONTROLADORES MPC	71
3.1 MPC COM COMPENSAÇÃO DE ATRASO EXPLICITA	71
3.1.1 Equivalência de representações sem atraso	73
3.2 PREDITOR DE SMITH FILTRADO EM ESPAÇO DE ESTADOS	74
3.2.1 Representação não-mínima em espaço de estados	75
3.2.2 Atraso efetivo por saída	78
3.2.3 Algoritmo MPC sem restrições	82
3.2.3.1 Condições estabilizantes	86
3.2.3.2 Exemplo de simulação	86

3.3 CONCLUSÕES	88
4 PREDITOR ÓTIMO COM COMPENSAÇÃO DE ATRASO ROBUSTA	91
4.1 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA	91
4.1.1 Descrição das incertezas	92
4.1.1.1 Incertezas no atraso	93
4.1.1.1.1 <i>Incetezas menores que o período de amostragem</i>	93
4.1.1.1.2 <i>Incetza no atraso de qualquer duração</i>	95
4.1.1.2 Análise das incertezas em representações não-mínimas	96
4.2 PREDITOR ÓTIMO COM COMPENSAÇÃO ROBUSTA	97
4.2.1 Análise de incertezas na predição	98
4.2.2 Análise do erro de predição	99
4.2.3 Efeito do preditor na presença de incertezas	100
4.2.3.1 Estabilidade robusta e satisfação de restrições	105
4.3 ESTIMADOR DE ESTADOS PARA SISTEMAS COM ATRASO	106
4.3.1 Compensação de atraso com estimador de estados	107
4.3.2 Análise de incertezas na predição	109
4.3.3 Análise do erro de predição	109
4.3.3.1 Estabilidade robusta e satisfação de restrições	110
4.4 ESTRATÉGIAS ROBUSTAS	112
4.4.1 Controlador linear	112
4.4.2 MPC baseado em tubo	113
4.4.2.1 Caso duplo integrador	115
4.5 CONCLUSÕES	117
5 COMPENSAÇÃO DE ATRASO VIA PREDITOR DE SMITH FILTRADO	121
5.1 PREDITOR DE SMITH FILTRADO PARA SISTEMAS COM ESTADOS MENSURÁVEIS	121
5.1.1 Análise do efeito de incertezas na predição	122
5.1.2 Análise do erro de predição	124
5.1.3 Comparação entre o preditor ótimo e o preditor de Smith filtrado	125
5.2 PREDITOR DE SMITH FILTRADO COM REPRESENTAÇÃO NÃO-MÍNIMA	127
5.2.1 Análise do erro de predição	132
5.3 ESTUDO DE CASOS	133
5.3.1 Coluna tipo “Wood-Bery”	134
5.3.2 Plataforma solar de Almería	139
5.3.2.1 Modelo simplificado	139
5.3.2.2 Modelo de predição proposto	141
5.3.2.3 Compensação de atraso robusta	143

5.3.2.4	Estratégia MPC	144
5.3.2.5	Resultados de simulação	146
5.3.3	Sistema de aquecimento didático	150
5.3.3.1	MPC baseado em tubos para seguimento de referência com compensação de atraso	150
5.3.3.1.1	<i>Correção da referência na presença de perturbações const-</i> <i>antes</i>	152
5.3.3.2	Resultados experimentais	153
5.4	CONCLUSÕES	155
6	CONCLUSÃO.....	161
6.1	CONTRIBUIÇÕES PRINCIPAIS	161
6.1.1	Lista de publicações	162
6.1.1.1	Periódicos Aceitos	163
6.1.1.2	Conferências Aceitas	163
6.1.1.3	Periódicos em revisão	163
6.2	PERSPECTIVAS DE ATIVIDADES FUTURAS	164
	Referências Bibliográficas	165
	APÊNDICE A – Estabilidade em MPC	175
	APÊNDICE B – Relações do filtro primário	179
	APÊNDICE C – Relação entre o Preditor Generalizado e Preditor de Smith filtrado	183
	APÊNDICE D – Estabilidade Entrada-Estado (ISS)	187
	APÊNDICE E – Análise da perturbação predita	193
	APÊNDICE F – Ganho de correção de referência	197

1 INTRODUÇÃO

Os controladores preditivos baseados em modelo, também conhecidos pelo acrônimo MPC, têm obtido um importante destaque no âmbito industrial desde a sua origem ocorrida no final dos anos setenta (CAMACHO; BORDONS, 2004). O termo MPC refere-se a uma classe de algoritmos que utiliza explicitamente o modelo do processo para obter uma sequência de controle ótima a cada período de amostragem (QIN; BADGWELL, 2003). Para obtenção desta sequência, otimiza-se uma função custo que considera tanto o esforço de controle, quanto o erro futuro, dentro de uma janela de predição. A cada período de amostragem, aplica-se apenas a primeira ação da sequência ótima, o que é conhecido como do princípio do horizonte deslizante (janela deslizante).

O destaque obtido pelos controladores preditivos deve-se principalmente à sua capacidade de incorporar uma série de características em uma estratégia de controle ótima. Algumas das principais vantagens dos MPCs foram relacionadas por Camacho e Bordons (2004), a saber:

- são particularmente interessantes para serem operados por pessoas com conhecimento limitado da teoria de controle uma vez que seus conceitos são intuitivos e a sintonia é relativamente simples;
- podem ser utilizados para controlar uma grande variedade de processos, desde aqueles com dinâmicas mais simples até os que apresentam dinâmicas mais complexas, incluindo atrasos longos, sistemas de fase não-mínima e sistemas instáveis;
- é possível lidar de forma direta com o caso multivariável;
- a compensação de atraso é feita de forma intrínseca;
- o controle por pré-alimentação (*feed forward*) pode ser inserido de maneira natural de maneira a compensar perturbações mensuráveis;
- no caso sem restrições, o controlador resultante é uma lei de controle linear de implementação simples;
- a extensão para o tratamento de restrições é conceitualmente simples uma vez que estas podem ser sistematicamente incluídas durante o projeto;
- é bastante útil quando as referências futuras são conhecidas a exemplo de robótica e processos em batelada;

- é uma metodologia aberta, baseada em certos princípios básicos, o que permite extensões futuras.

Por outro lado, em sua formulação inicial, os controladores do tipo MPC não possuem garantia de estabilidade. Segundo Mayne et al. (2000), nas primeiras versões, os proponentes industriais restringiram suas atenções a plantas estáveis, escolhendo horizontes longos se comparados ao tempo de acomodação da planta. Estas escolhas permitiram que os primeiros algoritmos MPC apresentassem propriedades de estabilidade semelhante às encontrados em controladores de horizonte infinito. Ainda segundo Mayne et al. (2000), o sucesso sem paralelo destas estratégias estimulou a academia a iniciar uma investigação teórica sobre os aspectos de estabilidade. Portanto, questões como estabilidade e robustez em MPCs despertam interesse tanto no meio industrial quanto no acadêmico.

No que diz respeito ao atraso, este é um fenômeno decorrente do deslocamento temporal que pode aparecer entre duas ou mais variáveis do sistema de controle. Ele está presente em grande parte dos sistemas reais podendo ser causado, por exemplo, pelo tempo necessário para transportar massa, energia ou informação, ou ainda pelo acúmulo do atraso de fase de vários sistemas de baixa ordem cascateados e do próprio tempo necessário para realização dos cálculos da lei de controle (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007). Neste trabalho serão considerados apenas os atrasos que surgem entre as variáveis de controle e os estados e/ou saídas. Na literatura é comum referir-se a este tipo de atraso como tempo morto ou atraso de transporte.

Como comentado anteriormente, estratégias de controle preditivo lidam diretamente com a questão do atraso uma vez que a compensação do mesmo é realizada de forma natural pelo algoritmo de otimização (CAMACHO; BORDONS, 2004). Porém sabe-se que a predição ótima, estrutura de compensação de atraso natural dos MPCs, pode não induzir à melhor resposta de malha fechada (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007). Nos últimos anos, alguns trabalhos voltados para sistemas com atraso passaram a utilizar um compensador de atraso robusto, também denominado preditor de Smith filtrado, com vistas a melhorar a robustez dos MPCs. Estes trabalhos apontam as vantagens da utilização de um compensador de atraso robusto na presença de incerteza no atraso como discutido em Normey-Rico e Camacho (2000), Torrico e Normey-Rico (2005a, 2005b, 2006, 2007) por exemplo. No entanto, com exceção de Torrico e Normey-Rico (2005a), esses trabalhos foram baseados em estratégias MPCs que não apresentam a propriedade de garantia de estabilidade nominal e portanto herdavam esta dificuldade das estruturas originais. Particularmente em Torrico e Normey-Rico (2005a), garante-se estabilidade nominal para o caso monovariável sem restrições, o que limita demasiadamente as potencialidades do algoritmo MPC.

Ao longo deste trabalho de doutorado, pretende-se estudar e propor estratégias de controle preditivo com garantias de estabilidade e satisfação robusta de restrições para sistemas com atraso. Uma das principais motivações desta Tese pode ser resumida por uma das perspectivas de trabalhos futuros apresentadas em Torrico (2007):

- “ Consolidar teoricamente, resultados práticos e eficientes de controle preditivo para sistemas com atraso, os quais foram desenvolvidos nesta Tese. No aspecto prático foi fundamental o uso de estruturas de preditor diferente, como é o caso do preditor de Smith filtrado, para o ajuste da relação desempenho-robustez.

Mesmo que, na literatura, já existam muitos resultados de estabilidade e de robustez para o caso de controladores preditivos sem atraso, os resultados são pouco eficientes e pouco práticos para processos com atraso, devido ao fato de que a ordem dos modelos crescem em função do atraso. Por outro lado, a análise teórica, com a inclusão de estruturas de preditores diferentes não é trivial. ”

1.1 MOTIVAÇÃO

A seguir se discutirá a respeito dos problemas associados à estabilidade e à robustez em controladores preditivos para sistemas com atraso.

1.1.1 Otimalidade não implica estabilidade

Sabe-se que nos controladores de horizonte infinito tipo LQR e LQG, apenas são necessárias condições elementares com vistas a garantir estabilidade (estabilizabilidade e detectabilidade). Este resultado é de certa forma intuitivo uma vez que, se é possível estabilizar o processo, então é razoável esperar que o ótimo seja estável uma vez que o erro não pode ir a infinito na melhor das situações.

Esta análise não pode ser feita nos controladores do tipo MPC devido ao princípio do horizonte deslizante, empregado neste tipo de estratégia. Para ilustrar este problema, considere que a sequência ótima, obtida num instante k , é dada por $u(k|k)$, $u(k+1|k)$, ..., $u(k+N_u-1|k)$ ¹. A ação de controle efetivamente utilizada em cada instante será $u(k) \triangleq u(k|k)$. Assim, para $k+1$, utiliza-se $u(k+1) = u(k+1|k+1)$ que pode ser consideravelmente

¹ Note que $u(k+i|k)$ é a i -ésima ação de controle que deve ser calculada dadas as informações do instante k .

diferente de $u(k+1|k)$. Na realidade, pode-se demonstrar, a partir do princípio de otimalidade de Bellman, que $u(k+1|k) \rightarrow u(k+1)$ apenas quando $N = N_u \rightarrow \infty$. Como consequência, ao otimizar uma janela de predição finita, observando instantes (horizontes) distintos, não se obtém a solução ótima do problema de horizonte infinito. Desta maneira, se uma função custo é mal escolhida, o sistema de malha fechada controlado por uma estratégia MPC pode ser instável mesmo para o caso nominal (sem incertezas).

A título ilustrativo, considere o problema dos quatro tanques apresentado em Johansson (2000) e discutido no contexto da sintonia de um algoritmo MPC em Garcia-Gabin e Camacho (2002). Neste caso, ao linearizar o modelo fenomenológico (não-linear) em torno de um ponto de equilíbrio, pode-se demonstrar que o sistema tem um zero de transmissão e que seu comportamento depende dos ajustes dos parâmetros da planta. O zero ajustável pode ser tanto de fase-mínima quanto de fase não-mínima. Em Garcia-Gabin e Camacho (2002) utilizaram-se os modelos lineares apresentados na sequência:

$$\mathbf{G}_-(s) = \begin{bmatrix} \frac{2.6}{62s+1} & \frac{1.5}{(23s+1)(62s+1)} \\ \frac{1.4}{(30s+1)(90s+1)} & \frac{2.8}{90s+1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}_+(s) = \begin{bmatrix} \frac{1.5}{63s+1} & \frac{2.5}{(39s+1)(63s+1)} \\ \frac{2.5}{(56s+1)(91s+1)} & \frac{1.6}{91s+1} \end{bmatrix}.$$

Este exemplo é interessante porque o zero de transmissão não pode ser identificado por simples inspeção. Observe que, à primeira vista, não existe uma diferença significativa entre os modelos $\mathbf{G}_-(s)$ e $\mathbf{G}_+(s)$. Contudo, para o modelo $\mathbf{G}_-(s)$, os zeros de fase mínima são $z_1 = -0.060$ e $z_2 = -0.018$ ao passo que, no caso $\mathbf{G}_+(s)$, os zeros são $z_1 = -0.057$ e $z_2 = 0.013$.

Neste contexto, serão realizadas duas simulações com controladores preditivos do tipo GPC para sistemas multivariáveis (CAMACHO; BORDONS, 2004). Considerou-se que não há erro de modelagem e nem restrições para efeito de análise. A função custo, utilizada neste exemplo, tem a forma

$$J(N_1, N_2, N_3) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \|y(k+j|k) - y_r(k+j)\| + \sum_{j=1}^{N_3} \|\Delta u(k+j-1)\|_{Q_u}$$

onde $y_r(k)$ é a referência e $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$ é o incremento de controle. Os parâmetros de sintonia para este exemplo são $N_1 = 1$, $N_2 = 40$, $N_3 = 10$, $Q_u = 0.1I$ e o período de amostragem $T_s = 2s$.

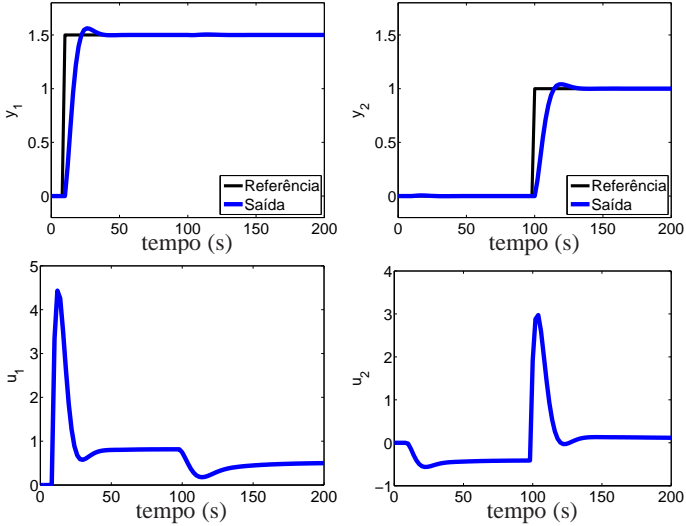


Figura 1 – Resposta obtida para $G_{-}(s)$.

A resposta do sistema $G_{-}(s)$ é apresentada na Fig. 1 através da qual verifica-se um desempenho satisfatório. No entanto, os mesmos parâmetros de sintonia provocaram uma resposta instável quando tentou-se controlar $G_{+}(s)$. Com este exemplo é possível ilustrar três pontos importantes: (i) otimalidade num horizonte finito não implica estabilidade devido ao princípio do horizonte deslizante, (ii) nem sempre é fácil perceber que uma função custo foi mal escolhida e (iii) algoritmos MPC com garantia de estabilidade são especialmente úteis nos casos de sistemas com dinâmicas complexas como plantas instáveis ou de fase não mínima.

1.1.2 Garantia de estabilidade em controladores preditivos

Nesta seção, a estrutura MPC com garantia de estabilidade padrão, apresentada em Mayne et al. (2000), será brevemente discutida. A generalidade desta estrutura permitiu unificar os elementos e condições estabilizantes dos sistemas controlados por algoritmos baseados no princípio do horizonte deslizante. Para tanto, considera-se um sistema dinâmico discreto invariante

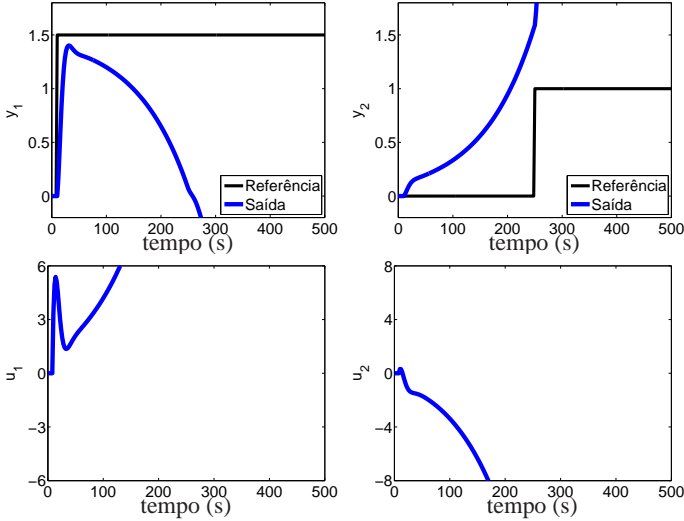


Figura 2 – Resposta obtida para $\mathbf{G}_+(s)$.

no tempo representado por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k), u(k)), \\ y(k) &= h(x(k)), \end{aligned} \quad (1.1)$$

sendo $x(k) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ o vetor de controle e $y(k) \in \mathbb{R}^p$ o vetor de saídas em um dado instante k . Admite-se que este sistema apresenta um ponto de equilíbrio na origem ($f(0, 0) = 0$), o que pode ser afirmado sem perda de generalidade uma vez que é possível utilizar variáveis de desvio.

Por outro lado, considera-se que as saídas e os estados estão submetidos a restrições na forma

$$u(k+i|k) \in \mathbb{U}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1.2)$$

$$x(k+i|k) \in \mathbb{X}, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (1.3)$$

de maneira que \mathbb{U} é um subconjunto convexo² e compacto³ de \mathbb{R}^m e \mathbb{X} é um

²Um subconjunto \mathbb{S} de um espaço vetorial real é convexo quando todo segmento de reta ligando dois pontos de \mathbb{S} está contido em \mathbb{S} .

³Se diz que um espaço topológico é compacto se qualquer cobertura aberta admitir uma subcobertura finita. Todo conjunto finito é compacto.

subconjunto convexo e fechado⁴ de \mathbb{R}^n . Além das restrições citadas, o último dos estados preditos no horizonte N deve pertencer a um conjunto terminal representado por

$$x(k+N|k) \in \mathcal{X}_f \subset \mathbb{X}. \quad (1.4)$$

Com vistas a simplificar a representação do problema de otimização, pode-se considerar que as restrições (1.2), (1.3) e (1.4) são mapeadas para a variável manipulada na forma $\mathbf{u}(k) \in \mathcal{U}(x(k))$. Assim, o problema de otimização para um horizonte finito N pode ser expresso por um problema $\mathcal{P}(x(k))$ como segue

$$\mathcal{P}(x(k)) : \min_{\mathbf{u}(k)} (\{V(x(k), \mathbf{u}(k)) | \mathbf{u}(k) \in \mathcal{U}(x(k))\})$$

com uma função custo definida por

$$V(x(k), \mathbf{u}(k)) = \sum_{i=0}^{N-1} L(x(k+i|k), u(k+i|k)) + F(x(k+N|k)),$$

sendo $\mathbf{u}(k) = \{u(k|k), u(k+1|k), \dots, u(k+N-1|k)\}$. As funções $L(\cdot, \cdot)$ e $F(\cdot)$ são conhecidas, respectivamente, como custo de etapa e custo terminal e têm a finalidade de determinar o objetivo a ser minimizado.

De maneira similar a Mayne et al. (2000), para reduzir o formalismo envolvido na discussão, considera-se que o custo de etapa é escolhido para atender $L(x, u) \geq c \cdot \|(x, u)\|^p$ com $p \geq 1$ e $c > 0$. Alternativamente, esta condição pode ser relaxada para $L(h(x), u) \geq c \cdot \|(h(x), u)\|^p$ desde que o par (f, h) seja detectável com $L(0, 0) = 0$.

Considerando a formulação padrão do problema de controle ótimo apresentado, pode-se afirmar que existem essencialmente três elementos utilizados para garantir estabilidade nas estratégias MPC: i) o custo terminal $F(\cdot)$, ii) o conjunto de restrição terminal \mathcal{X}_f e iii) um controlador estabilizante local $\kappa_f(\cdot)$, o qual é definido implicitamente pela estratégia ótima (MAYNE et al., 2000).

Uma vez que são considerados sistemas invariantes no tempo, pode-se utilizar a representação $x^+ = f(x, u)$ para indicar a transição de um estado $x(k)$ para o seu sucessor $x(k+1)$ com vistas a simplificar a notação. Desta forma, um conjunto de quatro axiomas é suficiente para resumir as condições de estabilidade de um controlador MPC de horizonte finito:

a1: $\mathcal{X}_f \subset \mathbb{X}$, \mathcal{X}_f é um conjunto fechado e $0 \in \mathcal{X}_f$.

⁴Um subconjunto \mathbb{F} é fechado num espaço vetorial real se o seu complementar for aberto. Um conjunto \mathbb{A} é aberto se todo ponto x pertencente a \mathbb{A} pode sofrer uma pequena variação ε e o ponto y , decorrente dessa variação, ainda pertence a \mathbb{A} .

a2: $\kappa_f(x) \in \mathbb{U}, \forall x \in \mathbb{X}$.

a3: $f(x, \kappa_f(x)) \in \mathcal{X}_f, \forall x \in \mathcal{X}_f$.

a4: $[F(f(x, \kappa_f(x))) - F(x) + L(x, \kappa_f(x))] \leq 0, \forall x \in \mathcal{X}_f$.

Os condições **a1** e **a2** são utilizadas para garantir que as restrições são respeitadas no conjunto terminal mediante a utilização da lei de controle local $\kappa_f(\cdot)$. A condição **a3** implica que a restrição terminal é um conjunto positivamente invariante mediante a utilização da lei de controle local $\kappa_f(x)$. Em outras palavras, a restrição terminal deve ser de tal forma que o sucessor de todo estado em \mathcal{X}_f , deve pertencer ao mesmo conjunto \mathcal{X}_f no instante seguinte mediante a aplicação da lei de controle local (terminal). Por fim, **a4** significa que $F(\cdot)$ é uma função de controle de Lyapunov para o sistema que descreve a trajetória do estado terminal.

Em linhas gerais, **a1**, **a2** e **a3** garantem que \mathcal{X}_f é um conjunto positivamente invariante admissível o que assegura a propriedade de factibilidade recursiva. Em outras palavras, se $\mathcal{P}(x(k))$ apresenta uma solução factível para $x(k)$, então existirá uma solução factível para $\mathcal{P}(x(k+1))$. Já a condição **a4** garante que a função custo $V(x(k), \mathbf{u}(k))$ é uma função de controle de Lyapunov para o sistema controlado. A prova de estabilidade é formalmente apresentada no Apêndice A. Deve-se notar que ao se cumprirem as quatro condições, basta que o ponto $x(0)$ retorne uma solução factível para garantir a estabilidade no sentido de Lyapunov. O conjunto de valores $x(0)$ que retorna soluções factíveis é chamado de região factível ou domínio de atração.

1.1.2.1 Casos lineares e efeito do atraso

Ao se considerar uma representação linear sem atraso, pode-se notar que a descrição do sistema reduz-se para

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k), u(k)) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= h(x(k)) = Cx(k). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Neste caso, a lei de controle estabilizante resume-se a uma realimentação de estados convencional na forma $\kappa_f(x(k)) = Kx(k)$ e o conjunto terminal pode ser escolhido como o máximo conjunto invariante admissível de saída (GILBERT; TAN, 1991).

Por outro lado, considerando uma representação em espaço de estados,

pode-se descrever o efeito do tempo morto como indicado a seguir

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k), u(k-d)) = Ax(k) + Bu(k-d) \\ y(k) &= h(x(k)) = Cx(k). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Deve-se notar que $f(x(k), u(k-d))$ não depende de $u(k)$ e, portanto, a lei de controle local $\kappa_f(x(k)) = Kx(k)$, que estabiliza o sistema sem atraso (1.5), pode resultar em um comportamento instável ao ser utilizada no sistema com atraso (1.6).

Como dito anteriormente, os algoritmos de controle preditivo tratam naturalmente do problema com atraso. Com o intuito de utilizar a abordagem padrão, proposta em Mayne et al. (2000), pode-se incorporar a dinâmica do atraso na forma de pólos na origem. Desta maneira, o sistema (1.6) poderia ser reescrito como

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= A_\xi \xi(k) + B_\xi u(k) = f(\xi(k), u(k)) \\ y(k) &= C_\xi \xi(k) \end{aligned} \quad (1.7)$$

com

$$\begin{aligned} \xi(k) &= \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-d) \\ u(k-d+1) \\ \vdots \\ u(k-2) \\ u(k-1) \end{bmatrix}, \quad A_\xi = \begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad B_\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{bmatrix}, \\ C_\xi &= [C \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]. \end{aligned}$$

Note que a nova representação pode ser utilizada diretamente considerando a lei estabilizante como sendo $\kappa_f(\xi(k)) = K_\xi \xi(k)$.

Apesar desta abordagem ser natural e sistemática, deve-se ressaltar que a dimensão da representação depende do tamanho do atraso discreto, o que pode dificultar a utilização desta abordagem em sistemas de atraso longo ou amostrados com um período de amostragem pequeno.

Além do ponto supracitado, as técnicas utilizadas para determinar o conjunto positivamente invariante apresentam um custo computacional elevado, especialmente nos casos de conjuntos invariantes robustos (PLUYMERS et al., 2005). Como consequência, a incorporação destes atrasos ao modelo de predição implicará no aumento do esforço computacional e pode gerar problemas numéricos. Note que se um sistema apresenta um atraso discreto $d = 100$, a representação aumentada terá no mínimo 101 estados.

1.1.3 Robustez dos controladores preditivos para sistemas com atraso

Em Normey-Rico e Camacho (2007) discute-se de forma detalhada a respeito do efeito do atraso no que se refere à redução da robustez em estratégias de controle tradicionais como o GPC e o DMC. Este resultado é importante uma vez que atrasos longos reduzem as margens de robustez apesar de induzirem a incertezas relativamente menores.

Esse problema será ilustrado com um exemplo apresentado em Normey-Rico e Camacho (2007). Considere um sistema representado por

$$P(s) = \frac{e^{-(L+\delta L)s}}{1 + 2s}$$

onde L é um atraso nominal e $\delta L = 0.4$ é uma incerteza no atraso. Fazendo $L = 0.4$, a incerteza representa 100% do valor nominal ao passo que para $L = 4$, a incerteza relativa é de 10%. O período de amostragem é $T_s = 0.2$.

Para controlar este sistema, serão utilizadas duas estratégias: um algoritmo preditivo do tipo GPC sem restrições e outra conhecida como preditor de Smith, que será detalhada no próximo capítulo. A estrutura do controlador tipo preditor de Smith é sintonizada para impor a mesma resposta de seguimento de referência do GPC para os casos sem perturbação ou incertezas. A seguir serão discutidas simulações com perturbação constantes no sinal de controle e na saída do sistema nos instantes 26 e 40 segundos respectivamente. As repostas para o caso sem incerteza ($\delta L = 0$) são apresentadas na Fig. 3 ao passo que as repostas com incerteza são verificadas na Fig. 4.

A partir do caso sem incerteza, verifica-se que a resposta ao seguimento de referência de ambos controladores são equivalentes ao passo que a rejeição a perturbação do preditor de Smith (PS) é um pouco mais lenta especialmente para $L = 4$. Por outro lado, quando se considera o efeito da incerteza, observa-se que as respostas são similares para $L = 0.4$, ao passo que o sistema com o GPC apresenta um comportamento instável para $L = 4$. Este resultado indica que a tamanho do atraso nominal afetou significativamente as margens de robustez do GPC. É importante ressaltar que a incerteza absoluta é a mesma de maneira que o problema está na forma pela qual se realiza a compensação de atraso no GPC.

Este resultado é discutido de maneira detalhada através das condições de estabilidade robusta (MORARI; ZAFIRIOU, 1989) para sistemas sem restrições em Normey-Rico e Camacho (2007). No entanto, em problemas com restrições, é necessário utilizar outras ferramentas, o que será tratado nesta Tese.

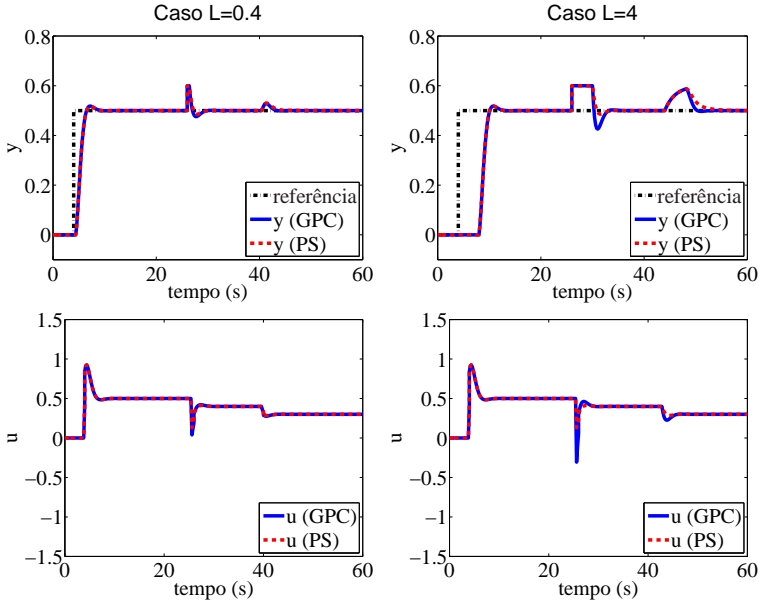


Figura 3 – Resposta para o caso sem incerteza $\delta L = 0$.

1.2 LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO

Sabe-se que as estratégias de controle preditivo são capazes de lidar com o efeito do atraso de forma intrínseca (CAMACHO; BORDONS, 2004). Devido a este fato, seria razoável concluir que o atraso não apresenta algum tipo de problema para algoritmos MPC. Possivelmente, este é um dos motivos pelo qual a literatura de controle preditivo para sistemas com atraso não ter evoluído tão rápido como outros temas a exemplo da estabilização e da robustez dos controladores MPC.

No que diz respeito a garantia de estabilidade em controladores preditivos para sistemas com atraso, foi apontado tanto em Park et al. (2007) quanto em Shi, Chai e Yue (2008) que existem poucos algoritmos MPC voltados para tratar da questão do atraso de maneira explícita. Em Kothare, Balakrishnan e Morari (1996), foi discutido sobre a possibilidade de incorporar o efeito do atraso na representação aumentada de forma que o seu algoritmo poderia ser utilizado diretamente a sistemas com atraso. Por outro lado, argumentou-se em Shi, Chai e Yue (2008) que a abordagem de Kothare,

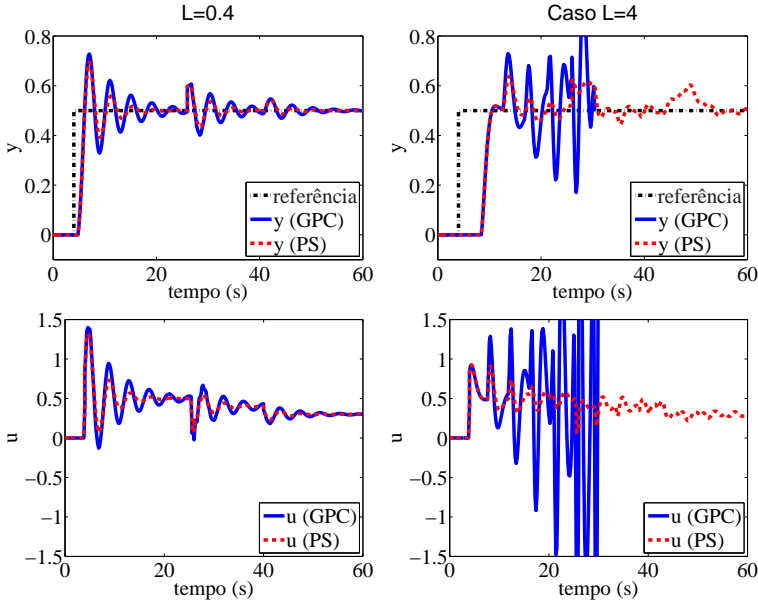


Figura 4 – Resposta para o caso com incerteza $\delta L = 0.4$.

Balakrishnan e Morari (1996) não é eficaz para sistemas com atraso variável ou com atrasos desconhecidos. Esta afirmação reflete a limitação do preditor ótimo em lidar com a incerteza do atraso como apontado em Normey-Rico e Camacho (2007). Desta forma, a partir do trabalho de Kothare, Balakrishnan e Morari (1996), vem sendo desenvolvida uma linha de pesquisa que trata do problema de controle preditivo para sistemas com atraso através de abordagens explícitas. Nesta linha, a função custo é posta considerando um horizonte infinito e o problema de otimização é escrito em termos de desigualdades lineares matriciais (LMI). Alguns dos primeiros trabalhos dentro deste contexto são Kwon et al. (2003) e Kwon, Lee e Han (2004) que são formulados considerando o problema de controle em tempo contínuo e não são consideradas restrições. Particularmente em Kwon et al. (2003) são apresentadas condições de estabilidade ao passo que em Kwon, Lee e Han (2004) utiliza-se uma estratégia mais avançada que lança mão de um custo terminal para garantir estabilidade. Posteriormente, foi proposta em Lee (2005) uma abordagem semelhante à de Kwon, Lee e Han (2004) mas esta última é menos restritiva por considerar uma condição de estabilidade dependente de atraso. Em Kwon, Lee e Han (2004) a condição de estabilidade é do tipo

independente de atraso. Já em Park et al. (2007), foi proposta uma técnica capaz de lidar com restrição no controle dentro do contexto de controladores preditivos com garantia de estabilidade para sistemas com atraso. Nos últimos anos, trabalhos como Shi, Chai e Yue (2008), Shi et al. (2009) e Ding (2010) foram apresentados com o intuito de considerar robustez para sistemas com incertezas formuladas através da abordagem politópica. Apesar de ser utilizado o princípio do horizonte deslizante, nos algoritmos citados neste parágrafo, são considerados estratégias de horizonte infinitos, sendo o problema de otimização resolvido a cada instante k , expresso em forma de LMI. Segundo Camacho e Bordons (2004), apesar de existirem técnicas eficientes para solução destes problemas: elas não são tão eficiente quanto os algoritmos especializados de resolução do problema de programação quadrática e dificulta-se o tratamento dos casos de infactibilidade uma vez que o sentido físico das restrições é perdido quando o problema é expresso no formato de LMIs. De fato, os algoritmos MPC empregados no âmbito industrial utilizam funções custo com horizonte finito como discutido em Qin e Badgwell (2003). Por outro lado, a literatura que trata a respeito do efeito do atraso de algoritmos MPC de horizonte finito é ainda mais escassa do que aquela baseada em horizonte infinito.

No que diz respeito ao problema MPC de horizonte finito, apesar de haver uma vasta literatura que trata a respeito de estabilidade (MAYNE et al., 2000), existem poucos trabalhos que discutem sobre a questão do atraso de forma explícita. Uma das exceções é Rao, Wright e Rawlings (1998) que foca na utilização de um método de ponto interior como ferramenta para solução do problema MPC. Este trabalho é interessante por propor, nas suas conclusões, uma forma de compensar o atraso de maneira explícita. No entanto, o efeito de incertezas no atraso não foi discutido no contexto desta abordagem. A questão do atraso em estratégias MPC de horizonte finito também foi discutido em (OLARU; NICULESCU, 2008). Neste caso, a questão da incerteza no atraso é expressa na forma de incerteza politópica, demonstrando-se que é possível estabilizar o sistema na presença de restrições no controle e incertezas no atraso de forma robusta. Esta abordagem é interessante, mas o esforço computacional do procedimento de síntese depende diretamente do comprimento do atraso nominal, o que pode inviabilizar a aplicação em sistemas com atrasos longos. Isto decorre da necessidade de utilizar a representação aumentada (OLARU; NICULESCU, 2008). Mais recentemente, foi proposta uma estratégia de controle preditivo robusto para sistemas com atraso (GONZÁLEZ; ODLOAK, 2011). Esta estratégia apresenta características importantes a exemplo do controle por zonas e do domínio de atração aumentado, no entanto assume-se que o sistema real (desconhecido) é descrito a partir de um conjunto finito de modelos conhecidos. Além disso, o comprimento do atraso

afeta o tamanho da representação, assim como ocorre em Olaru e Niculescu (2008).

De maneira similar a Rao, Wright e Rawlings (1998), estruturas de compensação de atraso, baseadas no preditor de Smith filtrado, podem ser utilizadas em estratégias de controle preditivo para sistema com atraso. No contexto desta linha de pesquisa, foi demonstrado, para sistemas sem restrições, que o desempenho robusto de estratégias MPC convencionais como o GPC poderia ser melhorado a partir da utilização de um filtro de robustez (NORMEY-RICO; CAMACHO, 1999). Posteriormente, o resultado de Normey-Rico e Camacho (1999) foi estendido para caso multivariável em Normey-Rico e Camacho (2000). Seguindo a mesma linha, em Torrico e Normey-Rico (2004), foi apresentado um algoritmo MPC para sistemas não lineares com atraso que faz uso da estrutura de compensação robusta do preditor de Smith filtrado. Este algoritmo foi testado com sucesso num sistema de dessalinização da Plataforma Solar de Almería - Espanha (TORRICO et al., 2010). Já em Torrico e Normey-Rico (2006), foi proposta uma formulação MPC que também utiliza a estrutura do preditor de Smith filtrado mas, que pode ser utilizada em plantas integradoras ou instáveis. Deve-se ressaltar que nenhum dos controladores citados apresentam garantia de estabilidade para sistemas com restrições, característica essa que depende da escolha adequada dos parâmetros de sintonia do controlador preditivo. Dentro desta linha, a única técnica que utiliza compensação de atraso robusta e apresenta garantia de estabilidade para o caso sem restrições foi proposta em Torrico e Normey-Rico (2005b). Este algoritmo, baseado no trabalho de Clarke e Scattolini (1991), é aplicável a processos monovariáveis mas herda as limitações de Clarke e Scattolini (1991). Estas limitações estão relacionadas à utilização de restrições terminais de igualdade uma vez que estas restrições impõem condições severas ao problema de otimização o que restringe demasiadamente a região factível e cria problemas de robustez (ROSSITER, 2003).

Considerando os trabalhos anteriormente apresentados, esta tese será dedicada ao estudo de estruturas de compensação de atraso para controladores preditivos de horizonte finito para sistema com restrições e incertezas.

1.3 OBJETIVO

O principal objetivo deste trabalho consiste em propor estratégias de compensação de atraso robusta que permitam garantir estabilidade e satisfação robusta de restrições em controladores preditivos para sistemas com atraso. Neste contexto, pretende-se estudar o efeito do atraso em controladores preditivos com garantias de estabilidade com vistas a apresentar formula-

ções alternativas que permitam minimizar os efeitos negativos decorrentes da presença do atraso.

De maneira mais específica, deseja-se aproximar alguns resultados teóricos recentes que tratam de robustez e controladores MPC, com a praticidade do preditor de Smith filtrado, que permite considerar aspectos de sintonia de maneira simples e eficaz. Para tanto, será utilizada uma formulação teórica que pode ser aplicada a sistemas com restrições uma vez que esta é uma característica importante das estratégias MPC.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho está dividido da seguinte forma. No Capítulo 2, serão apresentadas as idéias de compensação de atraso e de predição para controle as quais serão utilizadas ao longo do trabalho como forma de melhorar o desempenho dos algoritmos MPC para sistemas com atraso. Ainda no Capítulo 2, será apresentada uma nova técnica de sintonia para o compensador robusto com vistas a tornar o procedimento de ajuste mais intuitivo no caso de plantas instáveis e integradoras.

No Capítulo 3 discute-se a respeito da compensação de atrasos no contexto de estratégias de controle preditivo. Serão discutidas técnicas que podem ser utilizadas em representação em espaço de estados e em descrições do tipo entrada-saída.

Ao longo do Capítulo 4 será proposta uma estratégia de compensação de atraso robusta para sistemas representados em espaço de estados. Com esta técnica é possível garantir estabilidade e satisfação robusta de restrições para um sistema com atraso e incertezas a partir de um modelo de predição sem atraso.

No Capítulo 5 será discutida a mesma problemática do Capítulo 4, considerando, porém, a compensação de atraso baseada no preditor de Smith filtrado. Além disso, será estabelecido um paralelo entre a estratégia proposta no Capítulo 4 e o preditor de Smith filtrado, discutido neste mesmo capítulo.

Por fim, os últimos comentários serão apresentados no Capítulo 6.

2 PREDIÇÃO PARA CONTROLE

Na sequência, o conceito de predição para o controle será apresentado num contexto de compensação de atraso. Num primeiro momento, as idéias principais serão introduzidas tomando como referência um sistema de controle clássico monovariável. Em capítulos posteriores, estas idéias serão aplicadas a controladores preditivos lineares multivariáveis. Ainda neste capítulo será apresentada uma nova abordagem para a definição da sintonia de compensadores de atraso robusto. A estratégia proposta permite dar uma atenção especial à atenuação nas altas frequências, o que é um aspecto relevante de sistemas de controle na presença de ruído.

O conceito de predição para controle pode ser apresentado a partir de uma frase traduzida de Normey-Rico e Camacho (2007): “O melhor preditor não é aquele que produz as melhores predições, mas aquele que resulta nas melhores respostas em malha fechada. Ou seja, preditores devem ser projetados como um meio e não como um fim.” A primeira vista, seria natural pensar que a melhor predição induz à melhor resposta de malha fechada. No entanto, é importante lembrar que a predição está associada a um modelo nominal que difere do processo real. Com efeito, os preditores têm um papel importante na presença de incertezas e perturbações não modeladas. Nestes casos, a melhor predição, dado um modelo, pode não induzir à melhor resposta de malha fechada. Dentro desta linha, a utilização de compensadores de atraso robustos permitem melhorar a resposta da malha fechada, o que será discutido neste capítulo.

2.1 COMPENSAÇÃO DE ATRASO

Considere o sistema de controle monovariável com atraso apresentado na Fig. 5. Nota-se que o atraso está presente na equação característica de malha fechada como apresentado na sequência:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)e^{-sL}}{1 + C(s)G(s)e^{-sL}},$$

$$\frac{Y(s)}{Q(s)} = \frac{G(s)e^{-sL}}{1 + C(s)G(s)e^{-sL}}.$$

Sabe-se que este atraso reduz a margem de fase de malha fechada o que tende a degradar o desempenho ou até causar instabilidade. Como consequência, a redução de margem de fase impõe limites ao desempenho alcançável pelo

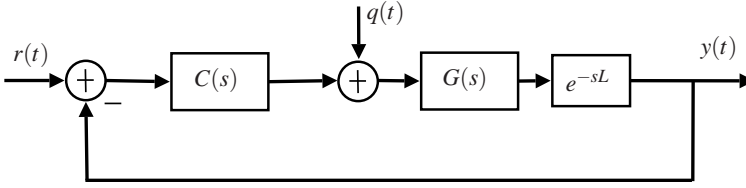


Figura 5 – Representação de um sistema de controle com atraso.

sistema de malha fechada. Esta característica dos sistemas com atraso pode ser ilustrada através de um exemplo apresentado em Normey-Rico e Camacho (2007).

Considere o modelo de um sistema de aquecimento de tanque alimentado por um cano longo descrito por

$$P(s) = \frac{1}{(1.5s + 1)(0.4s + 1)} e^{-Ls}.$$

O mesmo será controlado por um PI na forma

$$C(s) = k_c \frac{(sT_i + 1)}{sT_i}.$$

O ajuste $k_c = 1$, $T_i = 1.2$ foi proposto considerando que o sistema não apresenta atraso ($L = 0$). Neste caso, a margem de fase é de $MF = 70^\circ$ e a frequência de cruzamento de ganho $w_{cg} = 0.7\text{rad/s}$. Por outro lado, quando o atraso de $L = 1.5$ passa a ser considerado, a margem de fase passa a ser $MF = 5^\circ$ o que resultaria em um amortecimento pobre. Este efeito do atraso na margem de fase pode ser verificado através da Fig. 6. Com o intuito de melhorar o desempenho do sistema de malha fechada, o ganho k_c foi reduzido até chegar a uma margem de fase de 60° . Deve-se notar que esta redução no ganho implicou na diminuição da frequência de cruzamento de ganho para $w_{cg} = 0.25\text{rad/s}$ o que pode ser verificado na Fig. 6.

O comportamento temporal das respostas do tipo degrau de referência são apresentados na Fig. 7. Nela pode-se notar que o desempenho em malha fechada foi afetado significativamente devido a presença do atraso e que a redução do ganho torna a resposta de malha fechada consideravelmente mais lenta. Como dito anteriormente, o atraso impõe limites ao desempenho de malha fechada. A fim de evitar este tipo de dificuldade, pode-se utilizar estratégia de compensação de atraso a exemplo do preditor de Smith que será detalhada na próxima seção.

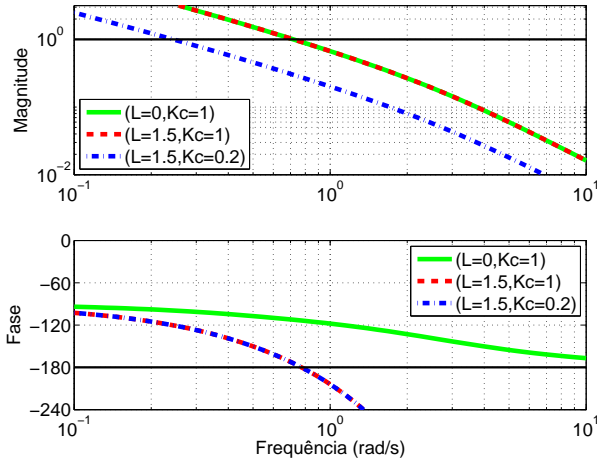


Figura 6 – Resposta em frequência do sistema com um controlador PI para diferentes atrasos e ajustes.

2.2 PREDITOR DE SMITH

A Fig. 8 representa uma situação ideal na qual seria possível isolar o processo do atraso de forma que a medição seria realizada num ponto a montante do atraso. Neste caso, não existiriam as dificuldades anteriormente apontadas uma vez que o atraso não faria parte da malha de controle e, conseqüentemente, não afetaria a equação característica como apresentado na sequência:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)e^{-sL}}{1 + C(s)G(s)}, \quad (2.1)$$

$$\frac{Y(s)}{Q(s)} = \frac{G(s)e^{-sL}}{1 + C(s)G(s)}. \quad (2.2)$$

Em teoria, o comportamento ideal, apresentado na Eq. (2.1), poderia ser obtido utilizando um preditor de malha aberta como indicado na Fig. 9, assumindo $G_n(s) = G(s)$ e $L_n = L$. Apesar desta estrutura cumprir um papel didático, ela não deve ser utilizada visto que as incertezas e perturbações não são realimentadas.

Em Smith (1957), foi proposta a estrutura de controle apresentada na

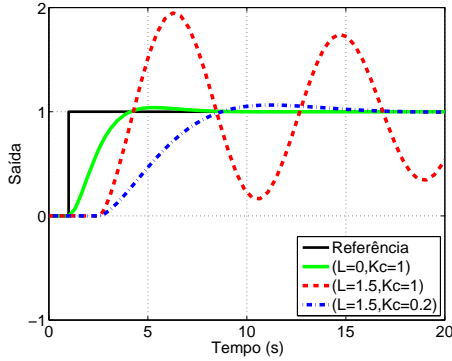


Figura 7 – Resposta ao degrau em malha fechada do sistema com um controlador PI para diferentes atrasos e ajustes.

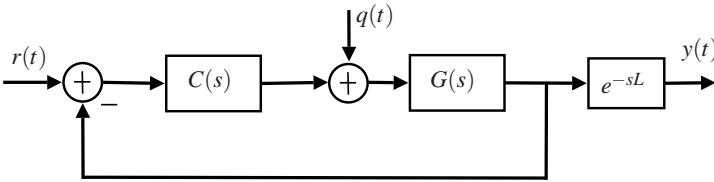


Figura 8 – Representação de um sistema de controle com atraso ideal.

Fig. 10 que é conhecida como preditor de Smith. A idéia é semelhante à do preditor em malha aberta, apresentada na Fig. 9, mas a estrutura completa é capaz de lidar com perturbações e incertezas. Neste caso, as funções de transferência nominais (sem incertezas) da referência e da perturbação para a saída são:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)e^{-sL}}{1 + C(s)G(s)}, \quad (2.3)$$

$$\frac{Y(s)}{Q(s)} = G(s)e^{-sL} \left[1 - \frac{C(s)G(s)e^{-sL}}{1 + C(s)G(s)} \right]. \quad (2.4)$$

Note que as Eq. (2.1) e Eq. (2.3) são idênticas e que o atraso não pode ser eliminado da malha devido à característica do processo. A importância do preditor de Smith se deve a três propriedades fundamentais para o caso nominal ($G_n(s) = G(s)$ e $L_n = L$):

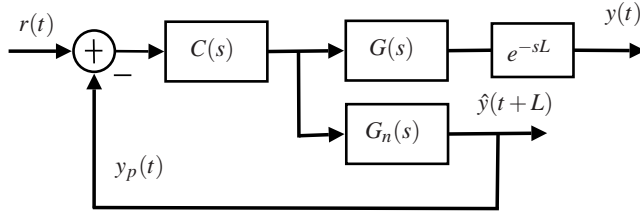


Figura 9 – Representação do preditor de malha aberta.

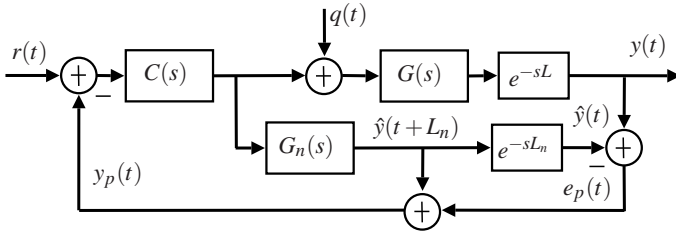


Figura 10 – Estrutura do preditor de Smith.

1. **Compensação de atraso:** O atraso não interfere na equação característica de malha fechada que é dada por $1 + C(s)G(s) = 0$, demonstrando que a estrutura do reditor de Smith evita a redução da margem de fase.
2. **Predição:** Pode ser observado, através das Figs. 9 e 10, que $y_p(t)$ é uma estimativa de $y(t+L)$. Esta propriedade permite projetar um controlador para o sistema com atraso a partir de um modelo sem atraso.
3. **Compensação dinâmica ideal:** Considerando o controlador ideal como sendo

$$\frac{C(s)}{1 + C(s)G_n(s)} = G_n(s)^{-1},$$

verifica-se que a saída é dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= r(t-L) + G(s)e^{-Ls}[q(t) - q(t-L)] \\ &= r(t-L) + G(s)e^{-Ls}[1 - e^{-Ls}]q(t). \end{aligned}$$

Esta propriedade é útil do ponto de vista teórico uma vez que é possível verificar que existe um limite de desempenho imposto pelo atraso mesmo nos casos em que se utiliza uma estrutura de predição e um con-

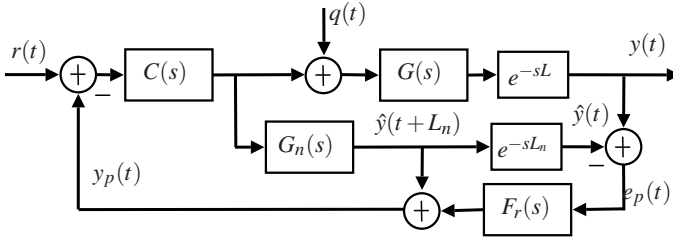


Figura 11 – Estrutura do preditor de Smith filtrado.

trolador ideal. Observe que sempre existe um atraso ($2L$) na resposta à perturbação na entrada da planta.

No entanto, sabe-se que esta estrutura do preditor de Smith possui algumas limitações uma vez que os pólos de malha aberta estão presentes na resposta à perturbação em malha fechada o que pode ser observado na Eq. (2.4). Devido a essa característica, o comportamento da rejeição de perturbação está condicionada a apresentar o efeito dos pólos de malha aberta e como consequência: i) a resposta à perturbação em malha fechada não pode ser mais rápida que a de malha aberta e ii) caso $G_n(s)$ possua pólos instáveis ou integradores, então o sistema não é internamente estável. Esta propriedade é uma consequência da estrutura do preditor de Smith dado que a lei de controle resultante impõe uma estratégia de controle por cancelamento.

2.3 PREDITOR DE SMITH FILTRADO

Uma das alternativas para superar as limitações do preditor de Smith baseia-se em utilizar um filtro que não altera a resposta ao seguimento de referência mas pode eliminar os pólos de malha aberta indesejáveis que afetariam a resposta à perturbação. O filtro de robustez, apresentado em Normey-Rico e Camacho (2007), deve ser inserido na malha como apresentado na Fig. 11.

A inserção do filtro de robustez na estrutura do preditor de Smith leva às seguintes relações nominais de malha fechada:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)e^{-sL_n}}{1 + C(s)G(s)}, \quad (2.5)$$

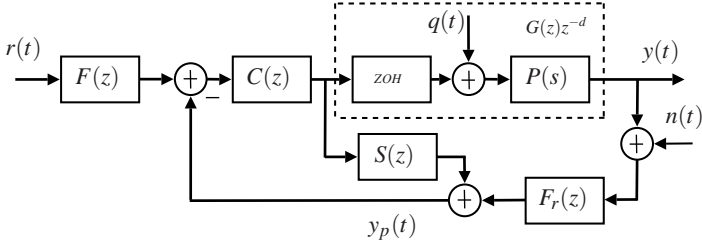


Figura 12 – Estrutura de implementação do preditor de Smith filtrado.

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{Q(s)} &= G(s)e^{-sL_n} \left[1 - \frac{C(s)G(s)e^{-sL_n}F_r(s)}{1 + C(s)G(s)} \right] \\ &= G(s)e^{-sL_n} \left\{ \frac{1 + [1 - e^{-sL_n}F_r(s)]C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \right\}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Desta forma, $F_r(s)$ pode ser sintonizado de forma que o termo $1 - e^{-sL_n}F_r(s)$ seja utilizado para eliminar os pólos indesejados de $\frac{Y(s)}{Q(s)}$. No entanto, a estrutura da Fig. 11 não realiza a eliminação efetiva dos pólos indesejados de forma que só pode ser utilizada em processos estáveis. Na prática, a implementação se dá através de uma estrutura de controle discreto com período de amostragem T_s na qual $G_n(z)$ é a discretização com um sustentador de ordem zero de $G_n(s)$, $d_n = L_n/T_s$ é o atraso discreto e $F(z)$ e $C(z)$ são obtidos a partir da discretização de $F(s)$ e $C(s)$. Desta forma, a implementação se dá através de uma estrutura como a apresentada na Fig. 12 onde $S(z) = G_n(z)[1 - F_r(z)z^{-d_n}]$ é uma função de transferência estável. Com esta escolha, $C_{eq}(s)$ deixa de ser um controlador por cancelamento, permitindo o controle de plantas instáveis e a aceleração de respostas a perturbações (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007). Deve-se salientar que a eliminação dos pólos instáveis se dá na estrutura do controlador o qual tem o papel de evitar que os pólos indesejados (instáveis) apareçam como zeros do controlador equivalente.

Como o próprio nome indica, o filtro de robustez cumpre um papel importante na presença de erro de modelagem. Para analisar o efeito deste filtro, considere que uma família de modelos lineares, definida por

$$P_i(z) = P_n(z)[1 + \delta P_i(z)], \quad (2.7)$$

é utilizada para representar o processo real com $|\delta P(z)| \leq \overline{\delta P}(z)$. Por definição $P(z) = G(z)z^{-d}$, $P_n(z) = G_n(z)z^{-d_n}$, $\overline{\delta P}(z)$ é a limitante das normas das

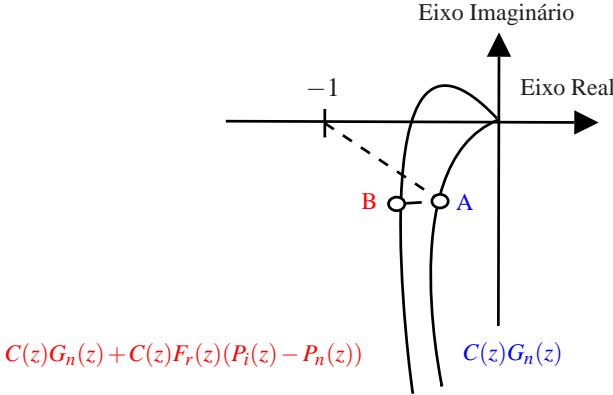


Figura 13 – Diagrama polar para análise de robustez.

incertezas multiplicativas e T_s é o período de amostragem.

A equação característica de malha fechada para o preditor de Smith filtrado com $P_i(z) \neq P_n(z)$ é dada por:

$$1 + C(z)G_n(z) + C(z)F_r(z)(P_i(z) - P_n(z)) = 0.$$

Dado o diagrama polar do sistema em malha aberta apresentado na Fig. 13, pode-se notar que o critério de robustez é verificado se a distância entre os pontos A e B (mesma frequência) é menor do que a distância do ponto A para $(-1, 0)$. Esta condição pode ser reescrita como

$$|C(z)G_n(z) + C(z)F_r(z)(P_i(z) - P_n(z)) - C(z)G_n(z)| < |1 + C(z)G_n(z)|$$

para $z = e^{j\omega T_s}$ com $\omega \in [0, \pi/T_s]$.

Por fim, utilizando a definição de incerteza multiplicativa apresentada na Eq. (2.7), verifica-se que $\delta P_i(z) = \frac{P_n(z) - P_i(z)}{P_n(z)}$ e portanto, a condição de estabilidade robusta pode ser escrita como

$$\overline{dP}(e^{j\omega}) < dP(e^{j\omega}) = \left| \frac{1 + C(e^{j\omega})G_n(e^{j\omega})}{C(e^{j\omega})G_n(e^{j\omega})F_r(e^{j\omega})} \right| \quad (2.8)$$

para $0 < \omega < \pi$. A partir da Eq. (2.8) pode-se concluir que $F_r(z)$ deve ser utilizado para reduzir o ganho do índice de robustez ($dP(e^{j\omega})$) nas frequências em que as incertezas multiplicativas ameacem a condição de estabilidade robusta. De um ponto de vista qualitativo, $F_r(z)$ deve ser utilizado para ate-

nua o efeito do erro de modelagem que surgirão em $e_p(t)$. Para explicitar o efeito do erro de modelagem com relação à sintonia do filtro de robustez, a condição apresentada na Eq. (2.8) foi reescrita na forma

$$|F_r(e^{j\omega})| < \left| \frac{1 + C(e^{j\omega})G_n(e^{j\omega})}{C(e^{j\omega})G_n(e^{j\omega})} \right| |\overline{\delta P}(e^{j\omega})^{-1} = \overline{\Omega}(j\omega). \quad (2.9)$$

onde $\overline{\Omega}$ é uma fronteira robusta para a resposta em frequência de $F_r(z)$. Note que dado um modelo sem atraso ($G_n(z)$), um controlador ($C(z)$), e um limitante para o erro de modelagem $\overline{\delta P}(e^{j\omega})$, o filtro de robustez deve ser sintonizado de forma a respeitar a fronteira robusta $\overline{\Omega}$.

Para ilustrar este efeito, considere um modelo estável e um filtro discreto de segunda ordem representado por

$$F_r(z) = \left[\frac{z(1 - \beta)}{(z - \beta)} \right]^2.$$

Neste caso, o parâmetro β pode ser escolhido arbitrariamente para garantir a condição descrita na Eq. (2.9). A resposta em frequência para diferentes valores de β é apresentada na Fig. 14 o que permite concluir que quanto maior o valor de β , maior será o efeito do filtro, aumentando o índice de robustez da Eq. (2.8).

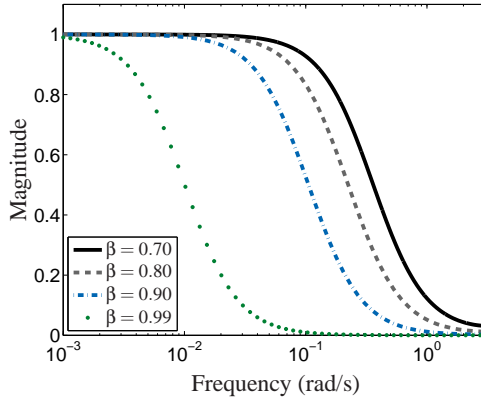


Figura 14 – Resposta em frequência do filtro de robustez para diferentes valores de β .

É importante enfatizar a importância do filtro de robustez que pode ser utilizado para:

- Melhorar a robustez do sistema de controle;
- Modificar a resposta de rejeição a perturbações;
- Garantir a estabilidade interna no caso de plantas que não são BIBO estáveis.

Como é de se esperar, existe um compromisso natural entre a velocidade da resposta de rejeição à perturbações e robustez. Quando se considera o efeito do ruído, este se concentra nas altas frequências em geral. Na próxima seção, será proposta uma nova abordagem para realizar a sintonia de $F_r(z)$ para plantas instáveis e integradoras com um destaque especial à simplificação do procedimento de ajuste para atenuação de altas frequências.

2.4 PREDITOR DE SMITH FILTRADO PARA PLANTAS INTEGRADORAS E INSTÁVEIS

Em controle de processos, é comum utilizar filtros com apenas um parâmetro de sintonia para dessintonizar um projeto inicial com vistas a atender todos os requisitos de malha (robustez, sensibilidade a ruído e rejeição a perturbações) (MORARI; ZAFIRIOU, 1989). Isto é motivado principalmente por razões de simplicidade no procedimento de ajuste o que pode ser verificado em diversas situações como por exemplo: nos filtros de robustez utilizados em Torrico e Normey-Rico (2005a), Normey-Rico e Camacho (2007), no filtro do controlador por modelo interno apresentado em Morari e Zafiriou (1989) e no filtro do erro de predição utilizado em Garcia, Albertos e Hagglund (2006), Garcia e Albertos (2008), Albertos e Garcia (2009). Para processos estáveis, estes filtros podem ser arbitrariamente definidos sem comprometer a estabilidade da malha de controle. Por outro lado, sabe-se que um ganho mínimo é necessário para estabilizar plantas instáveis em malha aberta e portanto, nestes casos, filtros como $F_r(z)$ não podem ser arbitrariamente definidos. Basta lembrar que $1 - F_r(z)z^{-d}$ deve cancelar os pólos instáveis de $G_n(z)$ na estrutura $S(z)$ que é utilizada para implementar o preditor de Smith filtrado. Nesta Seção será proposta uma abordagem alternativa na qual se utilizam novos parâmetros de ajuste para simplificar a sintonia de $F_r(z)$.

2.4.1 Problemática

Para evidenciar a limitação das estratégias que utilizam apenas um parâmetro de sintonia, será considerado o modelo de um processo de controle

de concentração usado em Normey-Rico e Camacho (2009) e em Albertos e García (2009):

$$P(s) = \frac{3.433}{103.1s - 1} e^{-20s}.$$

Esta função de transferência foi obtida a partir da linearização de um modelo de reator químico com mistura não ideal no qual a variável manipulada é a concentração de entrada e a variável de processo é a concentração de saída. O período de amostragem ($T_s = 0.5s$), definido em (ALBERTOS; GARCIA, 2009), será utilizado nesta Seção para obter do modelo discreto do processo. Um filtro de robustez na forma

$$F_r(z) = k_d \frac{z - z_d}{(z - z_f)^2}$$

será utilizado para reduzir a largura de banda do sistema sendo z_f um parâmetro de escolha arbitrária enquanto z_d e k_d são utilizados para garantir estabilidade interna e ganho estático unitário para o filtro de robustez ($F_r(1) = 1$ é a condição para rejeição de perturbação do tipo degrau). Isto é, para cada valor do parâmetro livre z_f , os parâmetros dependentes z_d e k_d são calculados para garantir as condições de estabilidade interna. As respostas em frequência de $F_r(z)$ para valores distintos de z_f são apresentadas na Fig. 15. Note que existe um pico causado pelo zero z_d o que é esperado uma vez que é necessário um ganho mínimo para estabilizar este processo. No entanto, o valor deste pico varia significativamente para escolhas diferentes de z_f . Ao se definir a largura de banda, automaticamente está se impondo um valor para o pico causado pelo zero ou vice-versa. Isto pode causar dificuldades na escolha de z_f porque, em diversas situações, pode ser desejável alterar a largura de banda sem alterar significativamente o pico. Note que, em geral, a largura de banda está relacionada a requisitos como atenuação de ruído e tempo de resposta ao passo que o pico de $F_r(z)$ está ligado principalmente a questões relacionadas a robustez.

2.4.2 Projeto alternativo do filtro de robustez.

Como explicado anteriormente, seria desejável que a resposta em frequência do filtro de robustez pudesse ser definida arbitrariamente. Isto não é possível devido à necessidade de garantir estabilidade interna que pode ser obtida através da adição de alguns zeros convenientemente escolhidos em $F_r(z)$. Uma vez que estes zeros adicionais dependem de z_f , é necessário utilizar um único parâmetro de sintonia para atender todos os requisitos de malha. Esta tarefa pode não ser simples como exemplificado através da Fig.

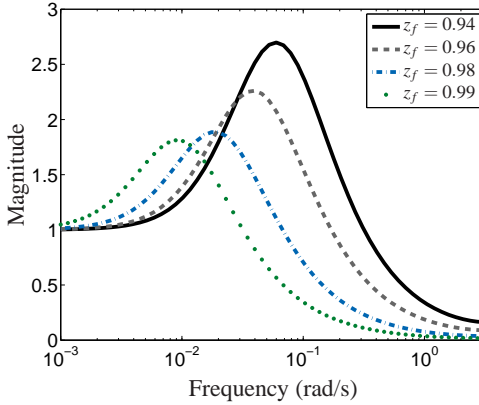


Figura 15 – Resposta em frequência do filtro de robustez para diferentes valores de z_f .

15. Para estes casos, será proposta uma abordagem alternativa que permite tornar o processo de sintonia do filtro de robustez mais natural. Nesta nova abordagem, outros parâmetros de ajuste devem ser utilizados para simplificar a definição da resposta em frequência de $F_r(z)$ com vistas a atingir os requisitos de malha especificados.

Num primeiro momento será estudado o comportamento dos zeros utilizados para garantir estabilidade interna. Para tanto, o filtro de robustez será dividido em duas partes: um filtro primário $F_p(z)$ arbitrário e um filtro de cancelamento $F_c(z)$ que possui os zeros adicionais. Assim, o filtro de robustez passa a ser

$$F_r(z) = F_p(z)F_c(z)$$

com $F_p(z)$ sendo um filtro estável qualquer definido por

$$F_p(z) = \frac{N_p(z)}{D_p(z)} = \frac{(z - z_{p1})(z - z_{p2}) \dots (z - z_{pv})}{(z - p_{p1})(z - p_{p2}) \dots (z - p_{pw})}. \quad (2.10)$$

e $F_c(z)$ um filtro com pólos na origem (tipo *Finite Impulse Response*) definido por

$$F_c(z) = \frac{b_{cn}z^n + b_{cn-1}z^{n-1} + \dots + b_{c1}z + b_{c0}}{z^n}.$$

Uma vez que $F_p(z)$ foi definido, os zeros de $F_c(z)$ devem ser calculados para garantir que os pólos indesejados de $G_n(z)$ não afetem a resposta à perturbação. Vale lembrar que $S(z) = G_n(z)[1 - F_r(z)z^{-d}]$ deve ser definido de ma-

neira que os pólos indesejados de $G_n(z)$ devem ser zeros de $1 - F_r(z)z^{-d}$ para garantir que eles não afetem a resposta à perturbação. Adicionalmente é necessário que $F_r(1) = 1$ para rejeitar perturbações do tipo degrau. Sem perda de generalidade, será considerado apenas o problema de rejeição a perturbação do tipo degrau para simplificar a discussão. Contudo, é possível considerar outros modelos de perturbação impondo condições adicionais a $F_r(z)$. Maiores detalhes são apresentados em (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007).

Definindo z_{0j} , $j = 0, 1, \dots, n$ como sendo os pólos indesejados e m_j suas respectivas multiplicidades, os parâmetros de $F_c(z)$ devem ser calculados para atender a seguinte condição

$$\begin{aligned} [1 - F_r(z)z^{-d}] \Big|_{z=z_{0j}} = 0 &\Rightarrow F_r(z)z^{-d} \Big|_{z=z_{0j}} = 1 \Rightarrow \\ \frac{1}{F_p(z)} \Big|_{z=z_{0j}} &= [b_{cn}z^{-d} + b_{cn-1}z^{-d-1} + \dots + b_{c0}^{-d-n}] \Big|_{z=z_{0j}}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Para os casos em que a multiplicidade do pólo j é diferente de 1 ($m_j \neq 1$), a Eq. (2.11) deve ser derivada $m_j - 1$ vezes para obter as $n + 1$ equações. Por definição impõe-se $z_{00} \triangleq 1$ para garantir que $F_r(1) = 1$. Em princípio, este procedimento pode ser aplicado a um número qualquer de pólos indesejados. No entanto, seria complicado estudar o comportamento dos zeros de $F_c(z)$ para um caso geral. Portanto, vamos particularizar a análise para o caso em que $G_n(z)$ apresenta apenas um pólo indesejado a fim de entender o efeito da escolha de $F_p(z)$ na localização dos zeros de $F_c(z)$.

Neste caso, o modelo discreto será descrito por

$$P_n(z) = \frac{G'_n(z)}{z - a} z^{-d_n}$$

supondo que não existem pólos instáveis ou integradores em $G'_n(z)$. O filtro de cancelamento será representado por

$$F_c(z) = \frac{b_{c1}z + b_{c0}}{z} = k \left(\frac{z - z_c}{z} \right).$$

Se o processo não é integrador ($a \neq 1$), as condições impostas pela Eq. (2.11) resultam no sistema de equações lineares expresso por

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a^{-d_n} & a^{-(d_n+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{c1} \\ b_{c0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_p(1)^{-1} \\ F_p(a)^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^{-1} \\ f_a^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

com $F_p(1) = f_1$ e $F_p(a) = f_a$. Por outro lado, se o modelo do processo é

integrador ($a = 1$), o sistema de equações se torna

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -d_n & -d_n - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{c1} \\ b_{c0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_p(1)^{-1} \\ \left. \frac{d}{dz} \frac{1}{F_p(z)} \right|_{z=1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^{-1} \\ \gamma_1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

onde γ_1 pode ser calculado a partir de $F_p(z)$ como apresentado no Apêndice.

Ao se resolver o sistema de equações lineares (2.12) ou (2.13), nota-se que os parâmetros do filtro podem ser obtidos diretamente a partir dos valores de a , d_n , f_1 e f_a (ou γ_1). Se $a \neq 1$ os parâmetros do filtro de cancelamento são

$$\begin{aligned} b_{c1} &= \frac{a^{d_n+1} f_1 - f_a}{(a-1) f_1 f_a}; & b_{c0} &= -\frac{a^{d_n+1} f_1 - a f_a}{(a-1) f_1 f_a}; \\ k &= \frac{a^{d_n+1} f_1 - f_a}{(a-1) f_1 f_a}; & z_c &= \frac{\frac{f_1}{f_a} - a^{-d_n}}{\frac{f_1}{f_a} - a^{-d_n-1}}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

No caso em que $a = 1$ os parâmetros do filtro de cancelamento passam a ser

$$\begin{aligned} b_{c1} &= \frac{(d_n + 1 + \gamma_1)}{f_1}; & b_{c0} &= -\frac{(d_n + \gamma_1)}{f_1}; \\ k &= \frac{(d_n + 1 + \gamma_1)}{f_1}; & z_c &= \frac{d_n + \gamma_1}{d_n + 1 + \gamma_1}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Um procedimento sistemático para definir $F_r(z)$ pode ser realizado como segue: (a) defina $F_p(z)$; (b) compute f_1 , f_a (ou γ_1) por meio da Eq. (2.10) (ou Eq. (B.1) apresentada no apêndice); (c) obtenha $F_c(z)$ por meio da Eq. (2.14) (ou Eq. (2.15)); (d) finalmente $F_r(z) = F_p(z)F_c(z)$. Esta abordagem é interessante porque a análise da posição do zero de cancelamento (z_c) pode ser realizada diretamente a partir de $F_p(z)$ e d_n através das Eq. (2.14) e (2.15)

2.4.3 Comportamento do zero de cancelamento.

Dado que é possível analisar o efeito de $F_p(z)$ em $F_c(z)$, a questão principal passa a ser: como utilizar esta informação para sintonizar $F_p(z)$ de forma que $F_r(z) = F_p(z)F_c(z)$ apresente um comportamento desejado? Como ponto de partida para esta escolha, é razoável escolher $F_p(z)$ na forma de um filtro passa baixas para aumentar o índice de robustez nas frequências críticas e proporcionar atenuação de ruído nas altas frequências. A seguir, o efeito de $F_p(z)$ no posicionamento do zero de $F_c(z)$ será separado nos casos integradores, instáveis e estáveis para obter mais informações a respeito da

sintonia de $F_p(z)$.

2.4.3.1 Processos integradores ($a = 1$)

Se $F_p(z)$ é passa baixas, $\gamma_1 > 0$ como demonstrado no Apêndice B.1. Portanto, pode-se concluir da Eq. (2.14) que ao variar-se γ_1 entre 0 e ∞ , então z_c varia de $d_n/(d_n + 1)$ até 1.

Note que em processos com atraso longo, esta região ($z_c \in (d_n/(d_n + 1), 1)$) é consideravelmente restrita porque $d_n/(d_n + 1) \approx 1$ o que pode elevar significativamente o ganho de $F_r(z)$ nas baixas frequências. Este efeito foi verificado qualitativamente em Santos e Normey-Rico (2009a) e vale ressaltar que quando $d_n \gg 1$, então $z_c \approx 1$. Em casos como este, uma escolha inadequada de $F_p(z)$ pode reduzir o índice de robustez (Eq.(2.8)) de maneira indevida nas frequências médias e baixas. Portanto, a escolha de $F_p(z)$ é particularmente importante para controlar o efeito de z_c nas frequências médias e baixas.

2.4.3.2 Processos instáveis ($|a| > 1$)

De maneira similar ao caso integrador, pode-se concluir, a partir da Eq. (2.14), que ao variar f_1/f_a de 1 para ∞ , z_c vai de $(1 - a^{-d_n})/(1 - a^{-d_n-1})$ para 1. Assim como no caso integrador, para sistemas com atrasos longos, $z_c = (1 - a^{-d_n})/(1 - a^{-d_n-1}) \approx 1$. Como consequência, o ganho de $F_r(z)$ pode crescer demasiadamente nas médias e baixas frequências se $F_p(z)$ não for bem escolhido. Em outras palavras, $F_p(z)$ deve ser sintonizado tendo em vista o efeito do zero z_c de forma semelhante ao caso integrador.

2.4.3.3 Processos Estáveis ($|a| < 1$)

Por fim, é possível analisar os casos em que se deseja evitar que um pólo dominante não interfira na rejeição de perturbação. Note que essa consideração só faz sentido nos casos em que a constante de tempo do pólo indesejado é consideravelmente maior que o atraso (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007). Quando isto não ocorre, o efeito do cancelamento do pólo indesejado é pequeno no tempo total de rejeição de perturbação uma vez que o atraso não pode ser evitado como visto na propriedade da compensação dinâmica ideal.

Como $|a| < 1$, da definição de um filtro passa baixas verifica-se que $f_1 \geq f_a$. Neste caso, se $F_p(z)$ é escolhido com $1 < f_1/f_a < a^{-d_n}$, então

conclui-se que $0 < z_c < (1 - a^{-d_n}) / (1 - a^{-d_n-1})$ a partir da Eq. (2.14). Este caso é consideravelmente diferente dos anteriores visto que z_c pode se aproximar de 0 a depender da escolha de $F_p(z)$. Por outro lado, é importante salientar que quando $L_n/\tau_n \rightarrow 0$, $a \rightarrow 1$ e o comportamento de $F_c(z)$ tende a se assemelhar ao caso integrador. De qualquer maneira, esta condição não é tão rigorosa quanto as anteriores porque ela está relacionada ao tempo de resposta e não é necessária para garantir estabilidade interna.

2.4.3.4 Procedimento de sintonia

Uma vez que o comportamento do zero de cancelamento foi analisada, é possível propor estratégias que permitam tornar o procedimento de ajuste de $F_p(z)$ mais intuitivo.

Uma idéia simples que pode ser utilizada para reduzir o efeito das variações de z_c no que diz respeito aos picos da resposta em frequência de $F_r(z)$ consiste em utilizar um pólo do filtro primário nas proximidades de z_c . Em outras palavras, o filtro primário pode ser separado em um filtro primário de pico ($F_{pp}(z)$) e um filtro primário de largura de banda ($F_{pb}(z)$) de forma que $F_p(z) = F_{pp}(z)F_{pb}(z)$. Para o caso em discussão,

$$F_{pp}(z) = \frac{z}{z - \alpha}$$

com α sendo utilizado para limitar o efeito de z_c com relação ao pico da resposta em frequência. A partir do comportamento do zero de cancelamento apresentado anteriormente, pode-se estabelecer um procedimento com o intuito de auxiliar na definição de α :

$$\begin{aligned} \text{(i) processo instável, } & \frac{1 - a^{-d_n}}{1 - a^{-d_n-1}} < \alpha < 1; \\ \text{(ii) processo integrador, } & \frac{d_n}{d_n + 1} < \alpha < 1. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Já $F_{pb}(z)$ pode ser arbitrariamente escolhido mas, em geral, um filtro de segunda ordem é suficiente para garantir uma atenuação considerável nas altas frequências.

Finalmente, considere o exemplo do controle de concentração apresentado na Subseção 2.4.1 com

$$F_p(z) = \frac{z}{z - \alpha} \frac{z^2}{(z - z_f)^2}.$$

Desta forma, α pode ser usado para lidar com o pico causado por z_c e z_f pode ser sintonizado para definir a largura de banda de $F_r(z)$. O comportamento do filtro para diferentes valores de α pode ser verificado na Fig. 16. Pode-se observar que o valor do pico é bem sensível à escolha de α uma vez que o zero de cancelamento está próximo de 1 ($z_c \in (0.978, 1)$). No entanto, quando é fixado $\alpha = 0.98$, a escolha de z_f tem pouco impacto no valor do pico o que é apresentado na Fig. 17. Neste último caso, z_f pode ser variado consideravelmente sem comprometer o comportamento das baixas frequências o que torna o ajuste mais intuitivo.

Embora a análise desenvolvida até o momento esteja restrita ao caso de um pólo indesejado, é possível utilizá-la em situações que $G_n(z)$ possui um número qualquer de pólos instáveis e/ou integradores de maneira qualitativa. Isto é possível porque a interpretação da necessidade de um pico capaz de garantir um ganho mínimo de malha, não depende do número de pólos. No caso mais amplo, o procedimento é menos sistemático e consiste em utilizar um filtro $F_{pp}(z)$ com pólos próximos aos zeros de $F_c(z)$. Uma escolha inicial para $F_{pp}(z)$ poderia ser $F_c^0(z)^{-1}$ com $F_c^0(z)$ sendo o filtro de cancelamento obtido para $F_p(z) = 1$. Para diminuir o pico de $F_r(z)$, o módulo dos pólos de $F_{pp}(z)$ devem ser aproximados gradualmente de 1.

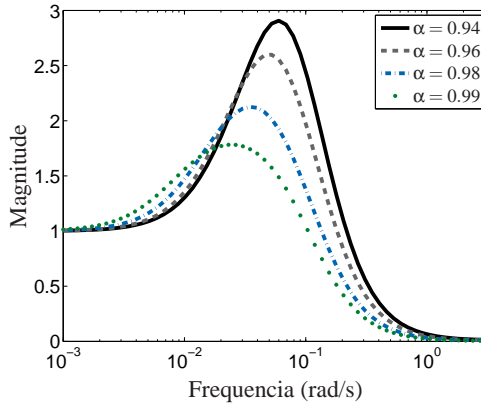


Figura 16 – Resposta em frequência do novo filtro de robustez para diferentes escolhas de α com $z_f = 0.90$.

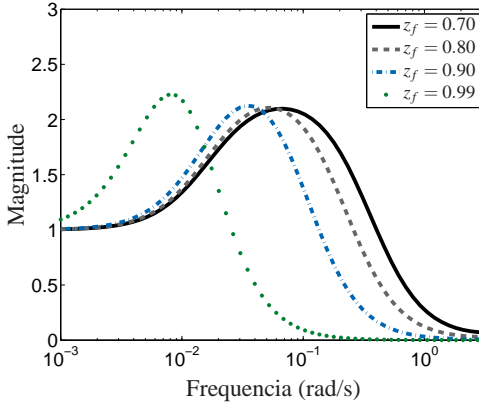


Figura 17 – Resposta em frequência do novo filtro de robustez para escolhas distintas de z_f com $\alpha = 0.98$.

2.5 PREDITOR ÓTIMO

Na literatura de sistemas com atraso existem diversos esquemas de predição, muitos dos quais baseados no preditor de Smith. No entanto, o preditor de Smith considera essencialmente uma representação entrada-saída, embora seja possível considerar representações em espaço de estados. Para o caso em espaço de estados, considere que o sistema linear é descrito por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k-d) \\ y(k) &= Cx(k). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Assim, as predições podem ser realizadas de forma recursiva como apresentado a seguir:

$$\begin{aligned}
 x(k+1|k) &= Ax(k) + Bu(k-d) \\
 x(k+2|k) &= Ax(k+1|k) + Bu(k-d+1) \\
 &= A^2x(k) + ABu(k-d) + Bu(k-d+1) \\
 x(k+3|k) &= Ax(k+2|k) + Bu(k-d+2) \\
 &= A^3x(k) + A^2Bu(k-d) + ABu(k-d+1) + Bu(k-d+2). \\
 &\vdots \\
 x(k+d|k) &= A^dx(k) + \sum_{j=1}^d A^{j-1}Bu(k-j).
 \end{aligned}$$

Como consequência, a predição da saída é obtida por

$$y(k+d|k) = CA^dx(k) + C \sum_{j=1}^d A^{j-1}Bu(k-j) \quad (2.18)$$

Em decorrência do efeito do atraso, o comportamento nominal do sistema (2.17) não é afetado por $u(k)$ até o instante $k+d$. Desta maneira, na ausência de perturbações mensuráveis, a melhor estimativa para $y(k+d)$ é dada pela equação (2.18). Para os controladores preditivos em espaço de estado, esta predição é realizada de maneira implícita numa parcela da predição denominada resposta livre que leva este nome por não depender de sinais controles futuros. Esta estrutura de predição é utilizada de maneira implícita nos controladores preditivos que utilizam modelos em espaço de estados (RAO; WRIGHT; RAWLINGS, 1998). Utilizando uma representação em espaço de estados convenientemente escolhida, pode-se demonstrar a equivalência entre este esquema e o preditor ótimo presente no GPC (CAMACHO; BORDONS, 2004).

Para utilizar o esquema de predição da Eq. (2.18), é necessário que os estados sejam conhecidos. Nos últimos anos, foram propostas algumas formulações alternativas baseadas no preditor ótimo para sistemas monovariáveis com estados não mensuráveis (GARCIA; ALBERTOS; HAGGLUND, 2006; GARCIA; ALBERTOS, 2008; ALBERTOS; GARCIA, 2009). Em (ALBERTOS; GARCIA, 2009), foi proposto um novo esquema de predição, então denominado de preditor generalizado, cuja estrutura será descrita a seguir.

2.5.1 Preditor Generalizado

O preditor generalizado é uma técnica de compensação de atraso apresentada em Albertos e Garcia (2009) que permite unificar os resultados para sistemas de fase mínima e não-mínima propostos em (GARCIA; ALBERTOS; HAGGLUND, 2006), generalizando os resultados para sistema de primeira ordem discutidos em Garcia e Albertos (2008). A grande vantagem deste esquema de predição está no fato de que a estabilidade interna é intrinsecamente assegurada pela estrutura do controlador. Desta forma, utiliza-se um filtro de predição que pode ser definido arbitrariamente para melhorar a robustez e lidar com a questão do ruído. A primeira vista, esta abordagem seria uma solução direta para o problema de compensação de atraso robusto. Contudo, será demonstrado que o preditor Generalizado pode ser interpretado como um preditor de Smith filtrado com um filtro de robustez particular de tal maneira que este esquema causa problemas no que diz respeito à atenuação de ruídos de altas frequências.

A estrutura de controle é apresentada na Fig. 18 onde $C(z)$ é o controlador primário, $F(z)$ é o filtro de referência, $F_1(z)$ e $F_2(z)$ definem o preditor e d_n é o atraso nominal. $F_k(z)$ é um filtro de predição estável que deve ser sintonizado para atender os requisitos de malha. As estruturas $F_1(z)$ e $F_2(z)$ são dadas por:

$$F_1(z) = C \sum_{i=1}^{d_n} A^{i-1} B z^{-i} \Gamma(z); \quad (2.19)$$

$$F_2(z) = \frac{\tilde{G}_n^*(z)}{\tilde{G}_n(z)} = \frac{CA^{d_n}(zI - A)^{-1}B}{C(zI - A)^{-1}B}, \quad (2.20)$$

com $\Gamma(z)$ = sendo um polinômio cujas raízes são os zeros de fase não mínima de $P_n(z)$, $\tilde{G}_n(z)$ é o modelo sem atraso e sem zeros de fase não-mínima e $(A, B, C, 0)$ é a representação por espaços de estado mínima de $\tilde{G}_n(z)$. Observe que $G_n(z) = \tilde{G}_n(z)\Gamma(z)$ e, para sistemas de fase não-mínima, $\Gamma(z) = 1$.

A título de comparação, considere um sistema de primeira ordem sem zero tal que $A = a$, $B = b$ e $C = c$ são escalares. Neste caso, um possível

preditor é obtido por

$$\begin{aligned}
 y(k+d|k) &= F_1(z^{-1})u(k) + F_2(z^{-1})y(k) \\
 &= c \sum_{i=1}^{d_n} a^{i-1} b z^{-i} u(k) + \frac{ca^{d_n}(z-a)^{-1}b}{c(z-a)^{-1}b} cx(k) \\
 &= c \sum_{i=1}^{d_n} a^{i-1} b z^{-i} u(k) + \frac{ca^{d_n}c(z-a)^{-1}b}{c(z-a)^{-1}b} x(k) \\
 &= c \sum_{i=1}^{d_n} a^{i-1} b z^{-i} u(k) + ca^{d_n}x(k).
 \end{aligned}$$

que é a expressão do preditor ótimo. No entanto, para o caso do preditor generalizado, considera-se um erro de predição filtrado adicional de maneira que o valor futura da saída é estimado por

$$y_p(k) = y(k+d|k) + F_k(z^{-1})[y(k) - y(k|k-d)].$$

Este erro de predição filtrado adicional permite modificar a resposta à perturbação e o comportamento robusto como será discutido adiante. De maneira similar ao preditor de Smith filtrado, é necessário que $F_k(1) = 1$ para eliminar o efeito de perturbações constantes.

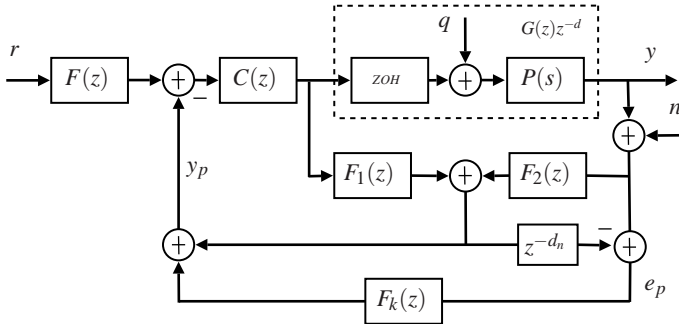


Figura 18 – Estrutura de controle do preditor generalizado.

2.6 COMPARAÇÃO ENTRE ESQUEMAS DE PREDIÇÃO

As únicas condições impostas ao filtro de predição do preditor generalizado são: i) estabilidade e ii) ganho estático unitário. Esta é uma característica interessante uma vez que os pólos e zeros podem ser escolhidos livremente. Em Garcia, Albertos e Hagglund (2006), Garcia e Albertos (2008) e Albertos e Garcia (2009), foram utilizadas aproximações discretas de filtros passa-baixas contínuos na forma $F_k(s) = 1/(\lambda s + 1)$ com vistas a melhorar a robustez e reduzir o efeito do ruído. No entanto, como dito anteriormente, sabe-se que é necessário um ganho mínimo para garantir a estabilidade de plantas instáveis ou integradoras o que parece contradizer o fato de que $F_k(z)$ pode ser escolhido livremente. Para esclarecer este ponto, pode-se demonstrar que a estrutura de predição do preditor Generalizado pode ser interpretado como um preditor de Smith filtrado de estrutura particular. Neste caso, basta considerar que o preditor Generalizado pode ser representado pela Fig. 12 com

$$F_r(z) = F_2(z) + F_k(z)[1 - z^{-d_n} F_2(z)].$$

A prova deste reformulação de malha é apresentada no Apêndice C.1. Esta interpretação é útil uma vez que permite comparar, de forma direta, os esquemas de predição, tornando possível analisar as características do preditor Generalizado a partir dos resultados conhecidos para o preditor de Smith filtrado.

A primeira característica interessante é que dado um filtro de predição convencional como por exemplo $F_k(z) = (1 - \beta)z/(z - \beta)$, o filtro de robustez do preditor Generalizado depende de d_n . Isto é indesejável porque em processos com atrasos longos ou amostrados com um período de amostragem pequeno, a ordem de $F_r(z)$ depende de d_n e portanto, será desnecessariamente grande. No entanto, o maior problema da estrutura proposta na Fig. 18 é que quando $F_k(z)$ é um filtro passa baixas, o ganho de altas frequências de $F_r(z)$ é definido por $F_2(z)$ que é uma estrutura que depende apenas do modelo do processo. Por exemplo, quando se considera o modelo de primeira ordem, observa-se que $F_2(z) = a^{d_n}$. Deve-se enfatizar que esta característica é indesejável principalmente em sistemas instáveis ou integradores visto que $|F_r(e^{j\omega})| \rightarrow a^{d_n} \geq 1$ quando $\omega \rightarrow \pi$. Veja que este comportamento pode ser verificado qualitativamente através da Fig. 18 na qual existe um caminho entre n e y_p que passa através de $F_2(z)$ e não passa por $F_k(z)$ que seria o filtro utilizado para lidar com ruídos e erros de modelagem.

Para ilustrar a importância desta característica, considere o modelo de controle de concentração discutido anteriormente que também foi utilizado em (ALBERTOS; GARCIA, 2009) onde $a = 1.005$ e $a^{d_n} = 1.22$. Vale ressal-

tar que naquele artigo, foi proposto utilizar

$$F_k(z) = \frac{1 - e^{-0.5/\lambda}}{z - e^{-0.5/\lambda}}$$

com $\lambda = 80$. Agora, a resposta em frequência de $F_r(z)$ será mostrada na Fig. 19 para valores distintos de λ : deve-se notar que a variação de λ é eficaz para alterar o comportamento das médias e baixas frequências de $F_r(z)$ o que pode ser útil no que se refere a robustez. Porém, o efeito de $F_k(z)$ é muito pequeno nas altas frequências onde verifica-se que o valor mínimo de ganho é determinado por $F_2(z) = 1.22$. Além disto, o efeito do filtro tende a saturar quando $F_k(z)$ tem uma dinâmica muito lenta porque a parcela $F_k(e^{j\omega})[1 - e^{-j\omega d_n} F_2(e^{j\omega})]$ tende a zero nas baixas frequências e o comportamento de $F_r(z)$ tende ao de $F_2(z)$. Em outras palavras, mesmo que $F_k(z)$ possa ter um comportamento arbitrariamente lento, o seu efeito na dinâmica de y_p é limitado devido à estrutura de predição.

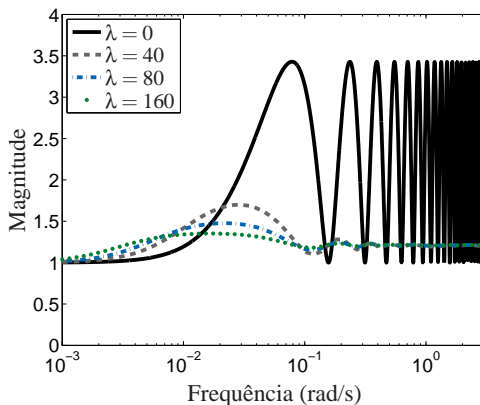


Figura 19 – Resposta em frequência do filtro de robustez para diferentes escolhas de λ do filtro $F_k(z)$.

2.6.1 Exemplo de simulação

Neste exemplo o preditor Generalizado (PG) e o preditor de Smith filtrado (PSF) serão comparados num contexto de rejeição de perturbação, presença de incertezas e atenuação de ruído. O modelo do reator é o mesmo apresentado na Subseção 2.4.1. Os controladores $C(s)$, $F(s)$ e $F_r(s)$ foram propos-

tos

em

Normey-Rico e Camacho (2009) e $F_k(s)$ foi proposto em Albertos e Garcia (2009) como apresentados a seguir:

$$C(s) = 3.29 \frac{43.87s + 1}{43.87s}; \quad F(s) = \frac{20s + 1}{43.87s + 1};$$

$$F_r(s) = \frac{(20s + 1)^2(93.16s + 1)}{(43.87s + 1)(26s + 1)^2}; \quad F_k(s) = \frac{1}{\lambda s + 1};$$

com $\lambda = 80$. As estruturas são discretizadas pelo casamento de pólos e zeros com $T_s = 0.5$.

Em Albertos e Garcia (2009), foi apontado que ambas estruturas apresentaram um desempenho similar tanto para o caso nominal, quanto para uma situação com erro de estimação no atraso de 30%. Este resultado poderia ser esperado a partir da análise da resposta em frequência dos filtros de robustez do preditor Generalizado e o preditor de Smith filtrado que são apresentadas no topo da Fig. 20. Nesta Figura, apresenta-se uma fronteira de robustez para um erro de estimação do atraso de 30%. Efetivamente a resposta em frequência das duas estruturas, apresentadas no topo da Fig. 20, são semelhantes. Isto ratifica o resultado obtido em Albertos e Garcia (2009) que aponta a semelhança de desempenho das duas estratégias. Por outro lado, estes controladores não são apropriados para situações com a presença de ruído uma vez que os ganhos das altas frequências são 1.22 e 1.26 para o preditor Generalizado e o preditor de Smith filtrado respectivamente. Além disso, é importante ressaltar que apesar da semelhança de desempenho, a ordem de $F_r(z)$ é 42 para o preditor Generalizado e 3 para o preditor de Smith filtrado.

Para tentar atenuar o efeito do ruído, seria importante dessintonizar as malhas reduzindo a largura de banda de $F_r(z)$. Neste caso, será utilizado $\lambda = 160$ em vez de $\lambda = 80$ para $F_k(k)$ e

$$F_r(z) = 0.03535 \frac{z^2(z - 0.9968)}{(z - 0.995)(z - 0.85)^2}$$

para o preditor de Smith filtrado. O pólo $\alpha = 0.995$ foi escolhido para garantir que o pico de $F_r(z)$ não ultrapasse a fronteira de robustez e $z_f = 0.85$ foi definido empiricamente. As respostas em frequência dos novos filtros de robustez do preditor de Smith filtrado e do preditor Generalizado são comparadas na parte inferior da Fig. 20. É interessante notar que: (a) $z_c = 0.9968$ está próximo de 1, mas a magnitude o valor do pico de $F_r(z)$ está sob controle devido ao efeito de $\alpha = 0.995$; (b) o ganho de altas frequências é praticamente 0 na abordagem alternativa e 1.22 quando se utiliza o preditor Generalizado e (c) utilizando a abordagem alternativa é possível lidar com as altas frequências

sem comprometer o comportamento das baixas frequências.

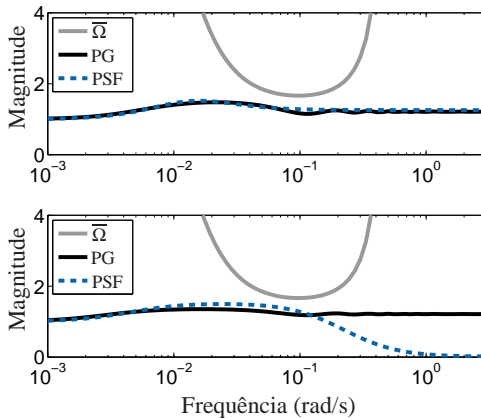


Figura 20 – Comparação do filtro de robustez. Superior - não se considerou o efeito do ruído; Inferior - considerou-se o efeito do ruído.

Para analisar o desempenho temporal dos controladores propostos, simularam-se ambas estruturas de controle com os novos filtros de robustez em três cenários: (i) modelo nominal com uma perturbação tipo degrau na entrada do processo, (ii) erro de estimação no atraso de 30% com uma perturbação tipo degrau na entrada do processo e (iii) modelo nominal com ruído de medição. As Figs. 21 and 22 representam os cenários (i) e (ii) respectivamente e são importantes para demonstrar que não há uma diferença significativa entre as estratégias propostas quando não se considera o efeito do ruído. No entanto, uma diferença significativa aparece no comportamento do sinal de controle quando o ruído é inserido na medição o que pode ser observado na Fig. 23. Esta diferença pode ser importante em termos práticos quando se considera redução de faltas em atuadores ou aumento da vida útil dos mesmos. Além do exposto, este exemplo é útil para enfatizar que o preditor pode ser muito importante para melhorar o desempenho de malha fechada e por isso, seu projeto deve ser realizado como um meio e não um fim.

2.7 CONCLUSÕES

Neste capítulo foram apresentados os principais elementos relacionados ao conceito de compensação de atraso no contexto de sistemas lineares monovariáveis. Em especial, foi proposta uma nova abordagem para defini-

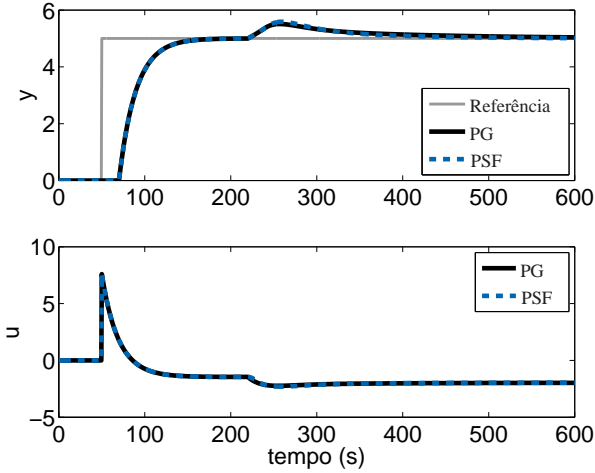


Figura 21 – Comparação de desempenho: caso nominal com perturbação.

ção do filtro de robustez com vistas a simplificar o processo de sintonia do preditor de Smith filtrado. Um exemplo de simulação foi utilizado para ilustrar a utilidade da abordagem proposta. Nos próximos capítulos, o problema da compensação de atraso será tratado no contexto de controladores preditivos.

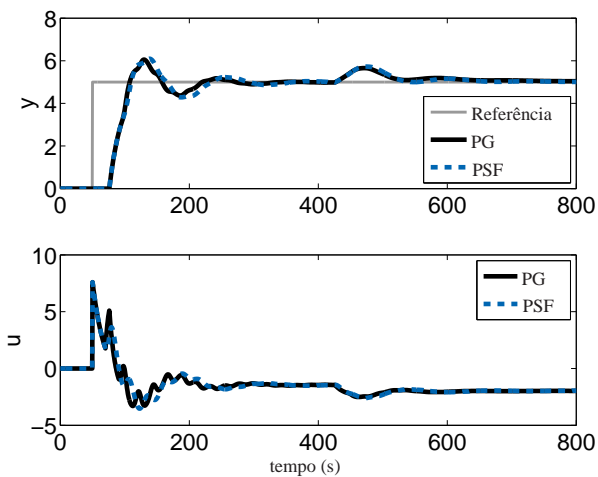


Figura 22 – Comparação de desempenho: caso com erro de estimação no atraso e perturbação.

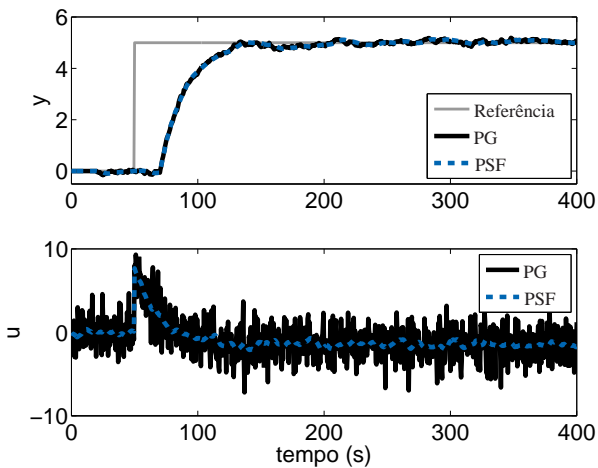


Figura 23 – Comparação de desempenho: caso nominal com ruído.

3 COMPENSAÇÃO DE ATRASO EM CONTROLADORES MPC

No Capítulo 1, discutiu-se uma forma para tratar o efeito do atraso de através da incorporação de autovalores na origem da descrição em espaço de estados discreto, induzindo a uma representação aumentada. Esta representação é especialmente útil nos casos em que se deseja definir elementos estabilizantes a partir de uma realimentação de estados convencional. Por outro lado, ela apresenta algumas desvantagens: (i) o crescimento do número de estados em função do atraso discreto e (ii) a impossibilidade de utilizar o Preditor de Smith filtrado como estrutura de compensação de atraso robusta. Neste capítulo será discutido a respeito da compensação de atraso para controladores MPC que utilizam a estrutura padrão apresentada em Mayne et al. (2000). Num segundo momento, será proposta uma formulação em espaço de estados com vistas a utilizar a estrutura de compensação de atraso do preditor de Smith filtrado em estratégias MPC com garantia de estabilidade.

Como dito anteriormente, é natural esperar que a compensação de atraso ocorra de forma intrínseca em estratégias MPC devido ao uso de previsões e ao fato de que a lei de controle é definida de forma ótima. Em linhas gerais, uma vez que não há efeito do controle sobre os estados (ou saída) no intervalo em que existe atraso, não há porque considerar este intervalo para fins de definição da ação de controle. Portanto, seja o sistema em espaço de estados com um atraso d representado por

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k-d) \\ y(k) &= Cx(k),\end{aligned}\tag{3.1}$$

observa-se que a relação entre causa e efeito ocorre de $u(k)$ para $x(k+d+1)$, $x(k+d+2)$, ..., $x(k+d+N)$. Consequentemente, não existe efeito de $u(k)$ sobre $x(k+1)$, $x(k+2)$, ..., $x(k+d)$, os quais poderiam ser desprezados para fins da definição de $u(k)$. Portanto, considerando o caso nominal, é possível estimar $x(k+d)$ de maneira explícita, fora do problema de otimização o que permite simplificar o modelo do sistema a ser controlado.

3.1 MPC COM COMPENSAÇÃO DE ATRASO EXPLÍCITA

Em Rao, Wright e Rawlings (1998), propôs-se uma técnica de ponto interior para tratar do problema de otimização de uma estratégia MPC com garantia de estabilidade. Os detalhes desta técnica não serão apresentados uma vez que ela pode ser enquadrada no resultado mais geral (MAYNE et

al., 2000). O trabalho de Rao, Wright e Rawlings (1998) é importante no contexto desta Tese porque se enfatizou a importância da compensação de atraso como forma de simplificar o problema MPC. Para tanto, considerou-se um sistema representado pela Eq. (3.1) e uma função objetivo de horizonte infinito como a apresentada a seguir

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [x(k)' Q_x x(k) + u(k)' Q_u u(k)].$$

Considerando o caso nominal, dado que o efeito de $u(k)$ surge apenas a partir de $x(k+d+1)$, pode-se fazer uma mudança de variável de forma que $\tilde{x}(k) = x(k+d|k) = x(k+d)$. Esta mudança de variável permite considerar a representação (3.1) d passos a frente que passa a ser descrita por

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1) &= A\tilde{x}(k) + Bu(k) \\ y(k+d) &= C\tilde{x}(k) \end{aligned} \quad (3.2)$$

com

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k) &\triangleq x(k+d|k) = A^d x(k) + \sum_{j=1}^d A^{j-1} Bu(k-j) \\ &= A^d x(k) + [A^{d-1} B \ A^{d-2} B \ \dots \ B] \begin{bmatrix} u(k-d) \\ u(k-d-1) \\ \dots \\ u(k-1) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

como discutido no Capítulo 2. É importante ressaltar que não estão sendo considerados os efeitos de perturbações e incertezas porque até este ponto considera-se apenas o problema da estabilidade nominal.

Partindo da nova representação, pode-se redefinir a função objetivo para a nova descrição na forma

$$\Phi' = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [\tilde{x}(k)' Q_x \tilde{x}(k) + u(k)' Q_u u(k)].$$

de tal forma que se verifica a seguinte relação

$$\Phi = \underbrace{\Phi' + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{d-1} [x(k)' Q_x x(k)]}_c$$

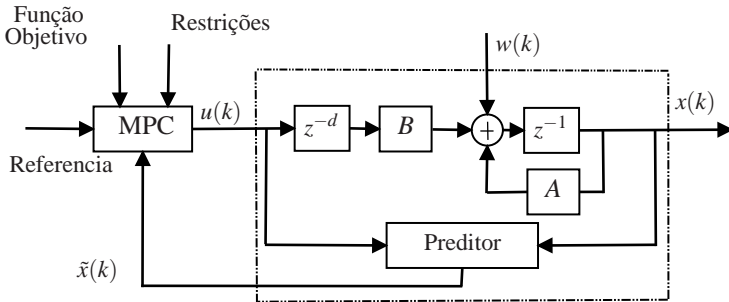


Figura 24 – Estrutura de controle preditivo com compensação de atraso explícita.

com c sendo um termo constante, que não depende das ações de controle que virão a ser aplicadas a partir de k . Em outras palavras, não há diferença entre utilizar a função objetivo Φ ou Φ' uma vez que ambas resultarão na mesma sequência de controle ótima e, por consequência, na mesma resposta em malha fechada.

A forma pela qual se trata o atraso em Rao, Wright e Rawlings (1998) é considerada como uma estratégia de compensação de atraso explícita uma vez que a predição está fora do problema de otimização. Assim, é possível aplicar a formulação MPC proposta em (MAYNE et al., 2000) considerando um modelo sem atraso, representado pela Eq. (3.2), no qual $\tilde{x}(k)$ é o estado obtido em k como ilustrado na Fig. 24. Em outras palavras, o controlador preditivo é utilizado para controlar um sistema composto pela planta em conjunto com a estrutura de predição cujo modelo é dado por uma descrição sem atraso. Desta maneira é possível controlar o sistema com atraso a partir de um controlador preditivo baseado num modelo sem atraso, o que elimina a necessidade de utilizar a representação aumentada para definir os elementos estabilizantes.

3.1.1 Equivalência de representações sem atraso

É importante enfatizar que, do ponto de vista de predição, os resultados obtidos com a compensação de atraso explícita são equivalentes aos que decorrem da representação aumentada. Este fato é uma consequência natural da equivalência das representações o que será detalhado a seguir.

Inicialmente utiliza-se que a representação aumentada (1.7) para obter

a predição $x(k+d|k)$. Considerando o modelo aumentado, obtém-se

$$\xi(k+d|k) = A_\xi^d \xi(k) + [A_\xi^{d-1} B_\xi \ A_\xi^{d-2} B_\xi \ \dots \ B_\xi] \begin{bmatrix} u(k|k) \\ u(k+1|k) \\ \vdots \\ u(k+d-1|k) \end{bmatrix}$$

ou alternativamente

$$\begin{aligned} \xi(k+d|k) &= \begin{bmatrix} x(k+d|k) \\ u(k|k) \\ \vdots \\ u(k+d-1|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^d & A^{d-1}B & \dots & B \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-d) \\ \vdots \\ u(k-1) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k|k) \\ u(k+1|k) \\ \vdots \\ u(k+d-1|k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.4)$$

A partir da Eq. (3.4) verifica-se que

$$\xi(k+d|k)' = [x(k+d|k)', u(k|k)', \dots, u(k+d-1|k)']'$$

com $x(k+d)$ sendo idêntico ao obtido por meio da Eq. (3.3). Em outras palavras, a estrutura de compensação explícita apresenta um resultado idêntico ao obtido com a representação aumentada no que diz respeito ao desempenho.

3.2 PREDITOR DE SMITH FILTRADO EM ESPAÇO DE ESTADOS

As técnicas de controle preditivo com compensação de explícita são justificadas por dois motivos principais: evitar a utilização da representação aumentada (RAO; WRIGHT; RAWLINGS, 1998) e melhorar a a robustez das estratégias de controle preditivo para sistemas com atraso (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007). O principal objetivo das técnicas de controle preditivo baseadas no preditor de Smith filtrado refere-se à melhoraria a robustez sem comprometer o desempenho nominal. Nesta seção, o problema da representação entrada-saída, típica do preditor de Smith, será formulado num contexto em espaço de estados.

A teoria de controle preditivo com garantias de estabilidade baseia-se essencialmente numa estrutura MPC baseada em modelos tipo espaço de estados devido à importância da teoria de Lyapunov para sistemas não-lineares (MAYNE et al., 2000). Isto permite englobar o efeito das restrições de forma natural, que é uma das principais vantagens dos controladores MPC. Por outro lado, na indústria de processos, é comum utilizar modelos tipo entrada-saída em detrimento das representações em espaço de estados. Dentre outros motivos, isto se deve ao fato de que as variáveis envolvidas têm algum significado físico e existem técnicas de identificação do tipo entrada-saída relativamente simples a exemplo do que ocorre com o preditor de Smith filtrado. Esta abordagem tem apresentado resultados promissores em controladores preditivos para sistemas com atraso (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007), mas ainda carece de um marco teórico referente a controle preditivo com garantias de estabilidade. Com o intuito de converter modelos entrada-saída para espaço de estados sem a necessidade de estimadores, serão utilizadas representações não-mínimas como as apresentadas em Wang e Young (1988), Camacho e Bordons (2004) e González, Perez e Odloak (2009).

3.2.1 Representação não-mínima em espaço de estados

Em representações não mínimas, há o inconveniente de serem utilizados mais estados do que o mínimo necessário o que cria alguns estados não controláveis e/ou não observáveis. Este fato pode causar um impacto negativo no que diz respeito ao custo computacional associado à implementação de estratégias de controle preditivo com garantia de estabilidade. No entanto, para fins de estudo do papel do preditor na presença de incertezas, esta representação é útil uma vez que não é necessário recorrer a estimadores pois todos os estados são conhecidos. Desta maneira evita-se que a dinâmica do erro do observador interfira na dinâmica da malha, simplificando o procedimento de análise.

Neste trabalho será utilizada a representação proposta em Wang e Young (1988) que é equivalente à Camacho e Bordons (2004) e à González, Perez e Odloak (2009) sob determinadas condições. Escolheu-se esta abordagem porque Wang e Young (1988) foi um dos primeiros trabalhos a propor uma representação não-mínima para o caso multivariável e o mesmo apresenta uma discussão detalhada a respeito das condições de controlabilidade e observabilidade, o que será brevemente descrito adiante.

Para tanto, considere um modelo multivariável discreto na forma de

Descrição por Fração de Matriz à Esquerda (LMFD) indicado na sequência

$$y(k) = \mathbf{A}(z^{-1})^{-1} \mathbf{B}(z^{-1}) u(k). \quad (3.5)$$

com $y(k) \in \mathbb{R}^p$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ e as matrizes de transferências sendo expressas por

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(z^{-1}) &= I + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + \dots + A_{na} z^{-na}, \\ \mathbf{B}(z^{-1}) &= B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + \dots + B_{nb} z^{-nb}. \end{aligned}$$

O vetor de estados $x(k) \in \mathbb{R}^{na+nb-1}$ na descrição proposta é dado por

$$x(k) = [y(k)' \ y(k-1)' \ \dots \ y(k-na+1)' \ u(k-1)' \ u(k-2)' \ \dots \ u(k-nb+1)']'$$

o que leva a uma representação em espaço de estados não-mínima na forma

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_{yu} x(k) + B_{yu} u(k) \\ y(k) &= C_{yu} x(k) \end{aligned} \quad (3.6)$$

com

$$A_{yu} = \begin{bmatrix} -A_1 & -A_2 & \dots & -A_{na-1} & -A_{na} & B_2 & \dots & B_{nb-1} & B_{nb} \\ I_p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & I_m & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & I_m & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} B_{yu} &= [\ B_1' \ 0 \ \dots \ 0 \ I_m \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \]', \\ C_{yu} &= [\ I_p \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \]'. \end{aligned}$$

Com relação à observabilidade, foi discutido em Wang e Young (1988) que o sistema é tecnicamente não-observável devido aos autovalores que se referem aos estados de controles passados. Este fato não é um problema pois estes estados são conhecidos por serem sinais de controle passados. Além disso, os autovalores não-observáveis estão na origem ($\lambda = 0$), portanto são estáveis. Com relação à controlabilidade, se a representação é co-prima, então os possíveis autovalores não controláveis também estão na origem. Assim, a representação em espaço de estados equivalente à LMFD é detectável e

estabilizável se não existe cancelamento de modos instáveis.

Para que a descrição LMFD e a representação não-mínima correspondente sejam equivalentes ao modelo de predição do GPC multivariável (CAMACHO; BORDONS, 2004), é necessário incorporar a ação de controle incremental. Neste caso, considere que a Eq. (3.5) é reescrita na forma:

$$y(k) = \mathbf{A}(z^{-1})^{-1} \mathbf{B}(z^{-1}) \Delta^{-1} \Delta u(k) = \tilde{\mathbf{A}}(z^{-1})^{-1} \mathbf{B}(z^{-1}) \Delta u(k). \quad (3.7)$$

com

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}(z^{-1}) &= I + \tilde{A}_1 z^{-1} + \tilde{A}_2 z^{-2} + \dots + \tilde{A}_{na+1} z^{-na-1} \\ &= I + (A_1 - I) z^{-1} + (A_2 - A_1) z^{-2} + \dots + (A_{na} - A_{na-1}) z^{-na} - A_{na} z^{-na-1}. \end{aligned}$$

Desta maneira os estados passam a ser descritos por

$$x(k) = [y(k)' \ y(k-1)' \ \dots \ y(k-na)' \ \Delta u(k-1)' \ \dots \ \Delta u(k-nb+1)']'$$

com o modelo incremental dado como segue

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_{y\Delta u} x(k) + B_{y\Delta u} \Delta u(k) \\ y(k) &= C_{y\Delta u} x(k) \end{aligned} \quad (3.8)$$

com

$$A_{y\Delta u} = \begin{bmatrix} -\tilde{A}_1 & -\tilde{A}_2 & \dots & -\tilde{A}_{na} & -\tilde{A}_{na+1} & B_2 & \dots & B_{nb-1} & B_{nb} \\ I_p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & I_m & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & I_m & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} B_{y\Delta u} &= [B'_1 \ 0 \ \dots \ 0 \ I_m \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]' \\ C_{y\Delta u} &= [I_p \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]'. \end{aligned}$$

Esta representação é útil porque as predições para a saída, obtidas com um GPC multivariável, equivalem às obtidas com a representação em espaço de estados Eq. (3.8) (CAMACHO; BORDONS, 2004). Isto permitirá discutir a respeito da estabilidade e robustez de sistemas modelados por representação entrada e saída a partir de ferramentas desenvolvidas para espaço de estados.

3.2.2 Atraso efetivo por saída

Representações entrada-saída permitem considerar o atraso (tempo-morto) entre o controle e cada uma das saídas de um sistema multivariável. O menor dos atrasos entre qualquer entrada de controle i e o seu efeito em uma dada saída j será denominado de atraso efetivo da saída j . Isto permite que a compensação de atraso seja realizada por cada uma das saídas de forma independente. A seguir será apresentada a maneira pela qual o atraso efetivo por saída pode ser considerado numa representação não mínima.

Considere que um sistema dinâmico é representado nominalmente por

$$y(k) = \mathbf{P}(z^{-1})u(k) = \mathbf{A}(z^{-1})^{-1}\mathbf{B}(z^{-1})u(k) \quad (3.9)$$

com $y(k) \in \mathbb{R}^p$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{P}(z^{-1})$ sendo uma matriz de transferência composta por $p \times m$ funções de transferência SISO na forma

$$P_{ij}(z^{-1}) = z^{-d_{ij}} \frac{z^{-1}b'_{ij}(z^{-1})}{a_{ij}(z^{-1})} = z^{-d_{ij}} G_{ij}(z^{-1}).$$

O atraso de cada função de transferência SISO ($z^{-d_{ij}}$) pode surgir devido a algum fenômeno relacionado à variável manipulada, à variável de processo ou em ambas. Em tese, este efeito poderia ser representado por

$$\mathbf{P}(z^{-1}) = \mathbf{D}_S(z^{-1})\mathbf{G}(z^{-1})\mathbf{D}_E(z^{-1})$$

onde \mathbf{D}_S é uma matriz com os atrasos da saída e $\mathbf{D}_E(z^{-1})$ uma matriz de atrasos da entrada do processo. Para exemplificar esta distinção, considere o atraso de comunicação em um sistema de controle via redes. Neste caso, se o atraso decorre da comunicação entre o sensor e o controlador, o seu efeito surge na variável de processo (representado em \mathbf{D}_S); por outro lado, se o atraso é causado pelo tempo de transmissão de uma mensagem do processador para o atuador, então o seu efeito aparece na variável manipulada (representado em \mathbf{D}_E). Do ponto de vista de um sistema de controle, quando se utiliza uma abordagem entrada e saída, a localização efetiva do atraso não altera o seu efeito na malha de controle. Assim, é possível manipulá-los de uma forma convenientemente escolhida do ponto de vista de controle.

A título de exemplo, num primeiro momento será considerado que todo o efeito do atraso surge na variável manipulada. Assim, o sistema apre-

sentado na Eq. (3.9) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
 y(k) &= \mathbf{D}_S(z^{-1})\mathbf{G}(z^{-1})\mathbf{D}_E(z^{-1})u(k) = \mathbf{G}_E(z^{-1})\mathbf{D}_E(z^{-1})u(k) \\
 &= \mathbf{G}_E(z^{-1}) \begin{bmatrix} z^{-d_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z^{-d_2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & z^{-d_m} \end{bmatrix} u(k) \\
 &= \mathbf{G}_E(z^{-1}) \begin{bmatrix} u_1(k-d_1) \\ u_2(k-d_2) \\ \vdots \\ u_{n_u}(k-d_m) \end{bmatrix} \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

com $d_j = \min_{i=1\dots p} d_{ij}$, $j = 1, 2, \dots, m$. Deve-se notar que d_j é o atraso efetivo para cada entrada j .

Por outro lado, é possível utilizar uma abordagem mais abrangente, considerando o atraso efetivo por saída, de forma que o sistema apresentado na Eq. (3.9) passa a ser descrito por

$$\begin{aligned}
 y(k) &= \mathbf{D}_S(z^{-1})\mathbf{G}(z^{-1})\mathbf{D}_E(z^{-1})u(k) = \mathbf{D}_S(z^{-1})\mathbf{G}_S(z^{-1})u(k) \\
 &= \begin{bmatrix} z^{-d_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z^{-d_2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & z^{-d_p} \end{bmatrix} \mathbf{G}_S(z^{-1})u(k)
 \end{aligned}$$

com $d_i = \min_{j=1\dots m} d_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, n_y$. Neste caso, d_i é o atraso efetivo por saída i e uma nova representação linear pode ser formulada como

$$\mathbf{D}_S(z^{-1})^{-1}y(k) = \begin{bmatrix} y_1(k+d_1) \\ y_2(k+d_2) \\ \vdots \\ y_p(k+d_p) \end{bmatrix} = \mathbf{G}_S(z^{-1})u(k).$$

Uma vez que na prática existem incertezas e perturbações, a saída futura pode ser estimada por meio do preditor de Smith multivariável (NORMEY-RICO;

CAMACHO, 2007) cuja notação será dada por

$$y(k+D|k) \triangleq \begin{bmatrix} y_1(k+d_1|k) \\ y_2(k+d_2|k) \\ \vdots \\ y_p(k+d_p|k) \end{bmatrix}.$$

Finalmente é possível definir uma descrição que relaciona o controle atual a uma saída futura (predita) no contexto de uma representação em espaço de estados, dada por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_{yu}x(k) + B_{yu}u(k) \\ y(k+D|k) &= C_{yu}x(k) \end{aligned}$$

com A_{yu} , B_{yu} e C_{yu} sendo obtidos a partir de

$$\mathbf{G}_S(z^{-1}) = \mathbf{A}_S(z^{-1})^{-1} \mathbf{B}_S(z^{-1})$$

e os estados dados por

$$\begin{aligned} x(k) &= [y(k+D|k)' \ y(k+D-1|k-1)' \ \dots \ y(k+D-na+1|k-na+1)' \\ &\quad u(k-1)' \ u(k-2)' \ \dots \ u(k-nb+1)']'. \end{aligned}$$

Esta representação permite que seja utilizado o preditor de Smith filtrado para sistemas multivariáveis para obtenção dos estados observáveis como detalhado na Fig. 25. Assim como no caso monovariável, $\mathbf{F}_r(z^{-1})$ deve ser definido de maneira que $\mathbf{S}(z^{-1}) = \mathbf{G}_S(z^{-1}) - \mathbf{F}_r(z^{-1})\mathbf{P}(z^{-1})$ seja estável com $\mathbf{F}_r(1) = \mathbf{I}$ e $\mathbf{S}(1) = 0$ para eliminar perturbações constantes. Outros tipos de perturbação podem ser consideradas impondo restrições adicionais a $\mathbf{S}(z^{-1})$ como apresentado em Normey-Rico e Camacho (2007).

Por fim, a estratégia MPC com compensação de atraso baseada no preditor de Smith filtrado está representada na Fig. 26 de maneira esquemática. Nesta formulação, considera-se que o processo controlado (“planta + Preditor de Smith filtrado”) não apresenta os atrasos efetivos por saída e portanto, o modelo de predição é dado pelo sistema da Eq. (3.6) (ou uma representação equivalente com modelo incremental). De maneira qualitativa, pode-se notar que a variável de processo passa a ser a saída predita, que corresponde a uma antecipação da saída real. Na presença de perturbações ou erros de modelagem, o filtro de robustez age para atenuar o efeito das incertezas e por conseguinte, aumentar a robustez. Esta formulação é particularmente interessante uma vez que pode ser aplicada a qualquer estratégia de controle

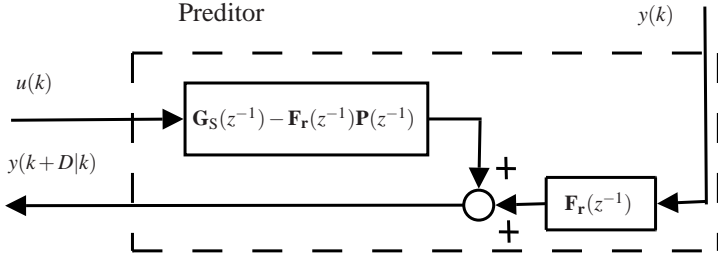


Figura 25 – Detalhe da estrutura do Preditor de Smith filtrado multivariável.

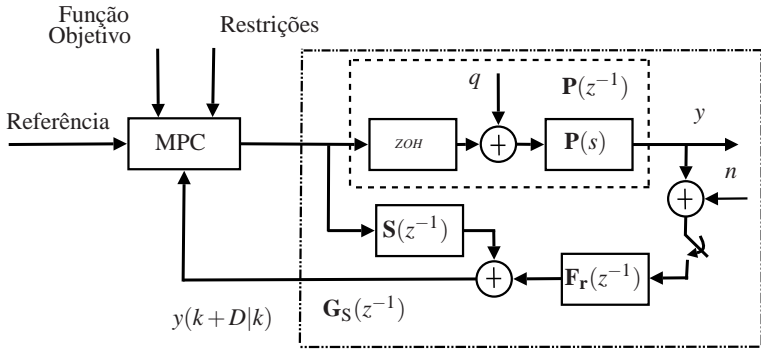


Figura 26 – Estrutura MPC com compensador de atraso robusto.

preditivo linear que utilize a forma padrão proposta em Mayne et al. (2000).

No que diz respeito a estabilidade da saída real, deve-se ressaltar que o filtro de robustez é escolhido de forma que em regime permanente $y(k + D|k) = y(k)$. Isto ocorre porque

$$y(k + D|k) = [\mathbf{S}(z^{-1})u(k) + \mathbf{F}_R(z^{-1})y(k)] \Big|_{z=1} = 0 \cdot u(k) + \mathbf{I} \cdot y(k) = y(k).$$

Em outras palavras, o filtro de robustez deve ser escolhido para garantir estabilidade interna de forma que a estabilização robusta do sistema predito “planta + Preditor de Smith filtrado” é condição suficiente para garantir a estabilidade do sistema real.

3.2.3 Algoritmo MPC sem restrições

Um MPC sem restrições com garantia de estabilidade para sistemas com atraso será proposto nesta parte do trabalho. Os principais objetivos são ilustrar a utilidade da representação não mínima e iniciar a discussão a respeito da robustez. Para isso, considere que a referência da saída (r_y) é constante dentro de um horizonte de predição de forma que a referência dos estados é dada por

$$r_x(k+i|k) = [r'_y \ r'_{\Delta u}]'$$

com

$$\begin{aligned} r_y(k+D+i|k) &= [r'_y \ r'_y \ \dots \ r'_y] \in \mathbb{R}^{(na+1)p}; \\ r_{\Delta u}(k+i) &= [0' \ 0' \ \dots \ 0'] \in \mathbb{R}^{(nb-1)m}. \end{aligned}$$

Neste algoritmo, a função custo é definida por

$$\begin{aligned} V(k) &= \sum_{i=0}^{N-1} \|r_y(k+D+i|k) - y(k+D+i|k)\|_{Q_y}^2 + \|\Delta u(k+i|k)\|_{Q_u}^2 \\ &\quad + \|r_x(k+N|k) - x(k+N|k)\|_P^2 \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \|r_x(k+i|k) - x(k+i|k)\|_{C'Q_yC}^2 + \|\Delta u(k+i|k)\|_{Q_u}^2 \\ &\quad + \|r(k+N|k) - x(k+N|k)\|_P^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

de forma que N é o horizonte de predição e controle, $Q_y > 0$ é a ponderação do erro, $R > 0$ é a ponderação do incremento de controle e $P \geq 0$ é a ponderação terminal. N , Q_y e R são parâmetros de sintonia definidos arbitrariamente e P deve ser convenientemente escolhido para garantir estabilidade. Então, a Eq. (3.11) pode ser reescrita numa forma matricial representada por

$$V(k) = [\mathbf{R}(k) - \mathbf{X}(k)]' Q [\mathbf{R}(k) - \mathbf{X}(k)] + \mathbf{U}(k)' \mathcal{R} \mathbf{U}(k) \quad (3.12)$$

com $\mathbf{U}(k)$, $\mathbf{X}(k)$ e $\mathbf{R}(k)$ sendo definidos por

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(k) &= [\Delta u(k|k)' \ \Delta u(k+1|k)' \ \dots \ \Delta u(k+N-1|k)']', \\ \mathbf{X}(k) &= [x(k+1|k)' \ x(k+2|k)' \ \dots \ x(k+N|k)']', \\ \mathbf{R}(k) &= [r(k+1|k)' \ r(k+2|k)' \ \dots \ r(k+N|k)']' \end{aligned}$$

e as matrizes de ponderação aumentada são

$$Q = \text{diag}(C'Q_yC, C'Q_yC, \dots, C'Q_yC, P), \quad \mathcal{R} = \text{diag}(Q_u, Q_u, \dots, Q_u).$$

Desta forma, os estados preditos podem ser relacionado ao estado atual $\tilde{x}(k)$ através de

$$\mathbf{X}(k) = \mathcal{A}\tilde{x}(k) + \mathcal{B}\mathbf{U}(k) \quad (3.13)$$

com

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} B & 0 & \dots & 0 \\ AB & B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N-1}B & A^{N-2}B & \dots & B \end{bmatrix},$$

e torna-se possível explicitar a Eq. (3.12) como uma função da variável de decisão ($\mathbf{U}(k)$). Neste caso, substituindo a Eq. (3.13) na Eq. (3.12), obtém-se

$$V_k = \frac{1}{2} \mathbf{U}(k)' H \mathbf{U}(k) + b \mathbf{U}(k) + f_0$$

com

$$\begin{aligned} H &= 2[\mathcal{B}'Q\mathcal{B} + \mathcal{R}] \\ b &= -2[\mathbf{R}'Q\mathcal{B} - \tilde{x}(k)' \mathcal{A}'Q\mathcal{B}] \\ f_0 &= [\mathbf{R} - \mathcal{A}\tilde{x}(k)]' Q [\mathbf{R} - \mathcal{A}\tilde{x}(k)]. \end{aligned}$$

Portanto, a sequência de controle ótima deve ser obtida através de

$$\frac{\partial V_k}{\partial \mathbf{U}} = 0 \Rightarrow \mathbf{U}^* = -H^{-1}b' = \mathcal{K}[\mathbf{R} - \mathcal{F}] \quad (3.14)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= [\mathcal{B}'Q\mathcal{B} + \mathcal{R}]^{-1} \mathcal{B}'Q' \\ \mathcal{F} &= \mathcal{A}\tilde{x}(k). \end{aligned}$$

Por fim, devido ao princípio do horizonte deslizante, o controle efetivamente utilizado deve ser

$$\Delta u(k) = [\underbrace{1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1}_m | \underbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0}_{(N-1) \times m}] \mathbf{U}(k).$$

Neste caso, é interessante ressaltar que: (i) $\mathcal{F} = \mathcal{A}\tilde{x}(k)$ é a resposta livre obtida através da representação por espaço de estados e (ii) $\tilde{x}(k)$, que é formado por $y(k + D - j|k)$, $j = 0, \dots, na$ e $\Delta u(k - i)$, $i = 1, \dots, nb - 1$. Como não há restrições, esta estratégia resulta em uma lei de controle linear multivariável. Em outras palavras, o incremento de controle pode ser obtido a partir de

$$\Delta u(k) = \mathbf{L}_w(z^{-1})r_y(k + D + N|k) - \mathbf{L}_u(z^{-1})\Delta u(k - 1) - \mathbf{L}_y(z^{-1})y(k + D|k) \quad (3.15)$$

ou simplesmente

$$u(k) = \mathbf{F}(z^{-1})r_y(k + D + N|k) - \mathbf{C}(z^{-1})y(k + D|k)$$

com $\mathbf{F}(z^{-1}) = (1 + z^{-1})(\mathbf{I} + \mathbf{L}_u(z^{-1}))^{-1}\mathbf{L}_w(z^{-1})$ e $\mathbf{C}(z^{-1}) = (1 + z^{-1})(\mathbf{I} + \mathbf{L}_u(z^{-1}))^{-1}\mathbf{L}_y(z^{-1})$. Portanto, o esquema de controle pode ser descrito em termos de matriz de transferência como apresentado na Fig. 27. Desta maneira, o papel do filtro de robustez multivariável pode ser analisado segundo os paradigmas de controle clássico (MORARI; ZAFIRIOU, 1989). Desta maneira, os resultados para sistemas sem restrições apresentados em Normey-Rico e Camacho (2007) podem ser aplicados diretamente a uma estratégia de controle preditivo com garantias de estabilidade desde que impostas as condições de Mayne et al. (2000).

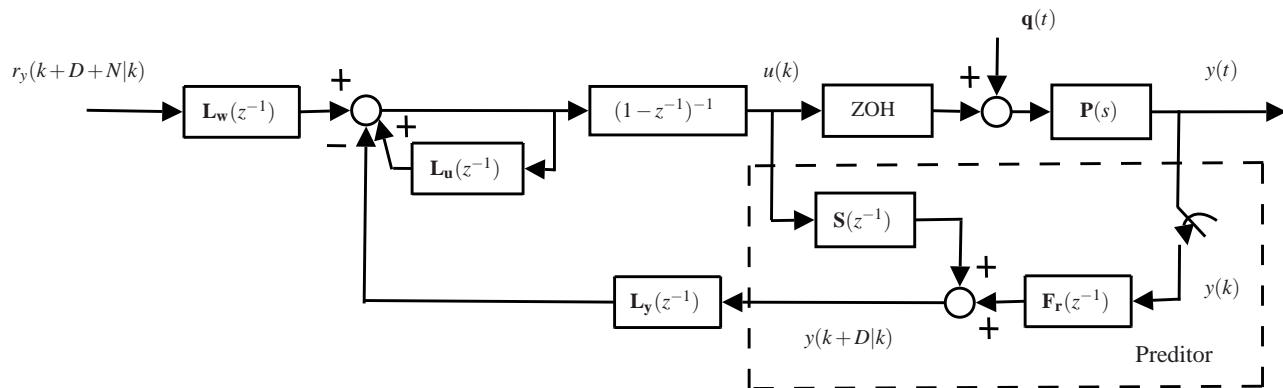


Figura 27 – Diagrama do controlador MPC sem restrições para sistemas com atraso

3.2.3.1 Condições estabilizantes

O controlador preditivo proposto apresenta um custo de etapa dado por

$$L(\tilde{x}(k+i|k), u(k+i|k)) = \|r(k+i|k) - \tilde{x}(k+i|k)\|_{C'Q_yC}^2 + \|\Delta u(k+i|k)\|_{Q_u}^2$$

com $Q_u > 0$ e $Q_y > 0$ sendo matrizes de ponderação do esforço de controle e do erro de saída. Como consequência, para o caso sem restrições, os elementos estabilizantes podem ser escolhidos como: i) a lei de controle estabilizante $\kappa_f(x(k+N|k)) = Kx(k+N|k)$ é tal que $A+BK$ tem autovalores no interior do círculo unitário, ii) o custo terminal,

$$F(\tilde{x}(k+N|k)) = \|r(k+N|k) - x(k+N|k)\|_P^2$$

é tal que

$$(A+BK)'P(A+BK) - P + K'Q_uK + C'Q_yC = 0,$$

iii) o conjunto de restrições terminal é dado por $\mathcal{X}_f = \mathbb{R}^n$ uma vez que não há restrições. A prova de estabilidade vem diretamente das condições de Mayne et al. (2000).

Devido à inclusão do custo terminal $F(\tilde{x}(k+N|k))$, este algoritmo será denominado controlador preditivo com compensação atraso e ponderação terminal (CPCAPT). Deve-se notar que para $P = C'Q_yC$, a formulação proposta recai num controlador preditivo multivariável para sistemas com atraso (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007), denominado DTGPGC, dado que a soma custo de etapa mais o custo terminal recai na função custo de um controlador GPC multivariável. Em ambos os casos a compensação de atraso é feita através do preditor de Smith filtrado, mas apenas o CPCAPT apresenta garantia de estabilidade.

3.2.3.2 Exemplo de simulação

Para ilustrar as propriedades do CPCAPT, será utilizado um modelo de um sistema de controle de nível e fluxo apresentado em Kouhi et al. (2007). O processo multivariável é representado por

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{9.02}{(2.57s+1)^2} e^{-\theta_{11}s} & \frac{10.01}{2s+1} e^{-\theta_{12}s} \\ \frac{0.495}{42s+1} e^{-\theta_{21}s} & \frac{6.34}{72s+1} e^{-\theta_{22}s} \end{bmatrix},$$

no qual os atrasos pertencem às faixas

$$\begin{aligned} 4.1 \leq \theta_{11} \leq 4.5, \quad 5 \leq \theta_{12} \leq 6.8, \\ 5.5 \leq \theta_{21} \leq 6.6, \quad 4.3 \leq \theta_{22} \leq 5.3, \end{aligned}$$

e os atrasos nominais foram escolhidos como $\theta_{11n} = 4.3$, $\theta_{12n} = 5.9$, $\theta_{21n} = 6$ e $\theta_{22n} = 4.8$. O sistema sem atraso apresenta um zero de fase não-mínima o que incrementa o desafio de controle. Todas as simulações foram realizadas com as mesmas matrizes de ponderação ¹ $Q_y = I$, $Q_u = 0.1 \text{diag}[9.02^2, 6.34^2]$ e período de amostragem $T_s = 0.1s$.

A primeira simulação, apresentada na Fig. 28, é utilizada para indicar que a resposta ao seguimento de referência do CPCAPT e do DTCGPC podem ser semelhantes. O cenário de simulação consiste de duas mudanças de referência de amplitude 100 e 10 para as saídas 1 e 2 respectivamente como em Kouhi et al. (2007). Para estas simulações utilizou-se $N = 50$ (horizonte de predição) e $N_u = 20$ (horizonte de controle) para o DTCGPC e $N = N_u = 20$ para o CPCAPT. Por simplicidade, para o caso do CPCAPT, escolheu-se a lei de controle local decorrente da política LQR com os mesmos $Q_x = C'C$ e $Q_u = 0.1 \text{diag}[9.02^2, 6.34^2]$.

Pode-se notar, a partir da Fig. 28, que as repostas do CPCAPT e do DTCGPC são semelhantes apesar do horizonte de predição do DTCGPC ser mais do que o dobro do CPCAPT. Para o caso em que se utiliza $N = N_u = 20$ na estratégia DTCGPC, observa-se o comportamento instável apresentado na Fig. 29. Como discutido no Capítulo 1, este resultado é típico em estratégias GPC para sistemas de fase não-mínima quando os horizontes de controle e predição são mal escolhidos (GARCIA-GABIN; CAMACHO, 2002). É importante ressaltar que este problema não ocorre no CPCAPT devido à utilização do custo terminal, o que permite assegurar estabilidade nominal para sistemas sem restrições. Vale ressaltar que no caso nominal, a saída predita corresponde à saída futura tanto com o preditor ótimo, quanto com o preditor de Smith filtrado. Desta maneira, a utilização do preditor ótimo geraria um resultado semelhantes aos do CPCAPT no caso de simulações sem incertezas (erros de modelagem, ruído ou perturbações).

Um segundo cenário é considerado para ilustrar o papel do filtro de robustez na presença de erros de modelagem. Para tanto, considera-se apenas

¹Deve-se notar que 9.02 e 6.34 são os respectivos ganhos dos elementos da diagonal principal. Escolheu-se $R = 0.1 \text{diag}[9.02^2, 6.34^2]$ como forma de ponderar o erro e o esforço de controle das duas saídas de maneira uniforme.

a estratégia CPCAPT com um filtro definido como segue

$$\mathbf{F}_r(z^{-1}) = \begin{bmatrix} \left(\frac{1-\beta_i}{1-\beta_i z^{-1}}\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\beta_i}{1-\beta_i z^{-1}}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

e o parâmetro β foi testado em duas situações: $\beta_1 = \beta_2 = 0$ e $\beta_1 = \beta_2 = 0.9$. Neste cenário, atribuiu-se os valores máximos ($\theta_{11r} = 4.5$, $\theta_{12r} = 6.8$, $\theta_{21r} = 6.6$ e $\theta_{22r} = 5.3$) aos atrasos do processo simulado e duas perturbações $\mathbf{q}_1(t) = [-10 \ 0]^T$ e $\mathbf{q}_2(t) = [0 \ -1]^T$ foram aplicadas em 150 e 220 segundos respectivamente à entrada do processo. Os resultados das simulações são apresentados nas Figs. 30 e 31. Pode-se notar, a partir das respostas nominais, que o filtro de robustez influenciou a rejeição de perturbação, deixando o sistema mais lento. No entanto, foi possível assegurar a estabilidade no caso com atrasos mal estimados. Como esperado, nota-se que a formulação proposta permite utilizar o filtro de robustez para melhorar o comportamento em malha fechada em algoritmos preditivos com garantia de estabilidade. Esse resultado é semelhante aos discutidos em Normey-Rico e Camacho (2007) que considerava algoritmos MPC sem garantia de estabilidade. O efeito do filtro de robustez e a discussão sobre estabilidade na presença de restrições e perturbações serão discutidos de forma analítica nos próximos capítulos.

3.3 CONCLUSÕES

Uma nova formulação em espaço de estados que incorpora a compensação de atraso robusta foi proposta neste capítulo. A idéia de compensação de atraso explícita foi discutida como uma alternativa para contrapor a incorporação da dinâmica do atraso na representação por espaço de estados. Esta nova representação será utilizada como base para a inclusão da estrutura do Preditor de Smith filtrado nas técnicas MPC que utilizam os elementos apresentados em Mayne et al. (2000) para garantir estabilidade. No próximo Capítulo, esta nova formulação será incorporada a algumas estratégias MPC com garantia de estabilidade.

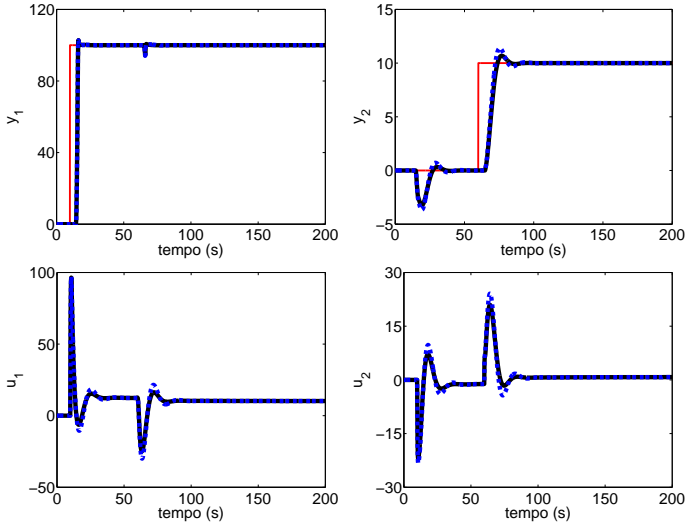


Figura 28 – Resposta da saída e do controle, $N^{DTCGPC} = 50$, $N_u^{DTCGPC} = 20$ e $N^{CPCAPT} = 20$: CPCAPT (sólido) e DTCGPC (tracejado).

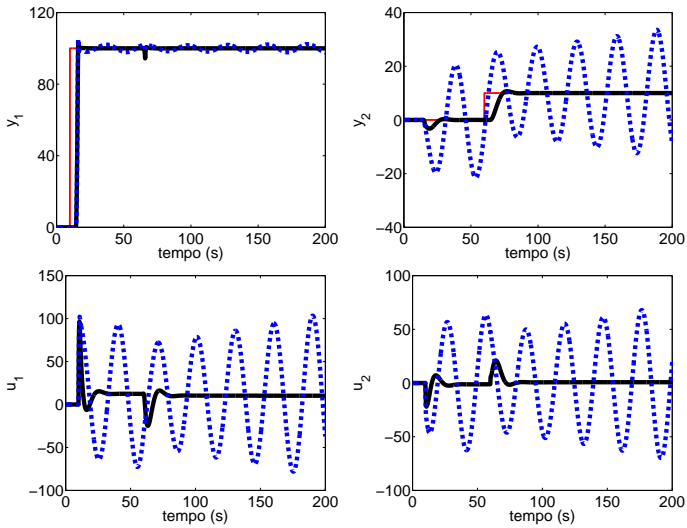


Figura 29 – Resposta da saída e do controle, $N^{DTCGPC} = 20$, $N_u^{DTCGPC} = 20$ e $N^{CPCAPT} = 20$: CPCAPT (sólido) e DTCGPC (tracejado).

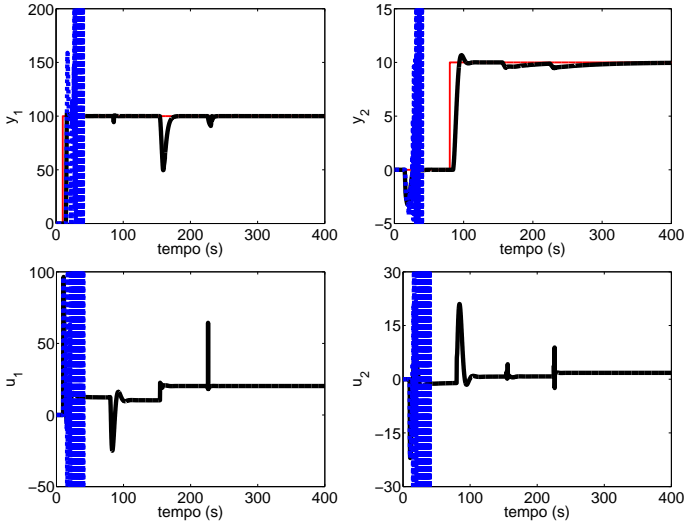


Figura 30 – Resposta da saída e do controle para o CPCAPT com $\beta_1 = \beta_2 = 0$: caso nominal (sólido) e caso com incerteza no modelo (tracejado).

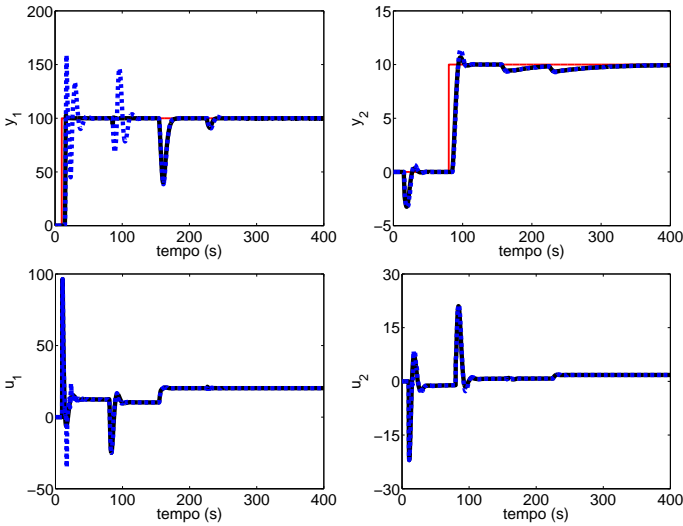


Figura 31 – Resposta da saída e do controle para o CPCAPT com $\beta_1 = \beta_2 = 0.9$: caso nominal (sólido) e caso com incerteza no modelo (tracejado).

4 PREDITOR ÓTIMO COM COMPENSAÇÃO DE ATRASO ROBUSTA

Nos capítulos anteriores foi discutido sobre a compensação de atraso em controladores preditivos desconsiderando o efeito das incertezas. Sistemas reais apresentam diversas fontes de incertezas a exemplo dos erros de modelagem, das perturbações não mensuráveis e de ruídos, que podem causar problemas como violação de restrições ou até instabilidade. Neste capítulo será proposta uma estratégia de compensação robusta que permite utilizar a estrutura do preditor ótimo, assegurando estabilidade e satisfação robusta de restrições na presença de incertezas. Num primeiro momento será analisada a ação das incertezas na presença do preditor ótimo, posteriormente será considerado o problema de robustez em sistemas com estados mensuráveis e finalmente será discutido o caso com estados não mensuráveis.

4.1 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Considere um sistema dinâmico com atraso descrito por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k-d) + w(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (4.1)$$

com $x(k) \in \mathbb{R}^n$ sendo o estado atual, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ é o sinal de controle atual, $w(k) \in \mathbb{R}^n$ é uma perturbação aditiva desconhecida e $y(k) \in \mathbb{R}^n$ é a saída desejada, definida como uma combinação linear dos estados. O sistema está sujeito a restrições poliedrais nos estados e no sinal de controle, representados na forma:

$$x(k) \in \mathbb{X}, \quad u(k) \in \mathbb{U}$$

com $\mathbb{X} = \{x \mid A_x x \leq b_x\}$ e $\mathbb{U} = \{u \mid A_u u \leq b_u\}$ sendo as matrizes A_u , A_x e os vetores b_u e b_x de dimensões apropriadas

Para o problema proposto, assume-se que: i) o par (A, B) é controlável, ii) o par (A, C) é detectável, iii) a perturbação aditiva é limitada, podendo ser incluída num poliedro convexo e compacto na forma $w(k) \in \mathbb{W}$ com $\mathbb{W} = \{w \mid A_w w \leq b_w\}$, sendo A_w e b_w matrizes de dimensões apropriadas e iv) os estados são conhecidos a cada período de amostragem.

O principal objetivo é definir uma lei de controle do tipo

$$u(k) = \kappa(x(k+d|k)),$$

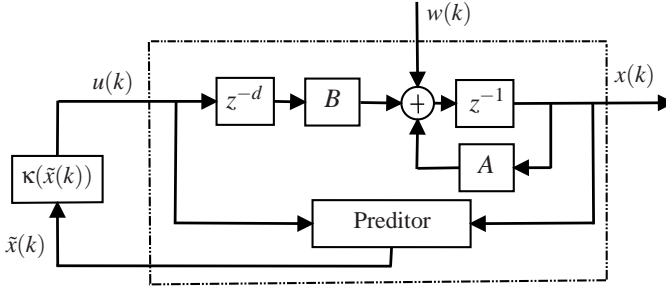


Figura 32 – Diagrama de um sistema de controle com estrutura de compensação de atraso.

utilizando um modelo de predição sem atraso, que permite realizar a regulação do sistema em torno da origem, garantindo estabilidade e satisfação das restrições para qualquer realização possível da perturbação. Considera-se uma lei de controle geral, representada por uma função $\kappa(\tilde{x}(k))$, porque os resultados que serão apresentados não estão restritos a estratégias do tipo MPC. Formula-se este objetivo com o intuito de fazer uso de estratégias de controle com compensação de atraso conforme indicado na Fig 32. Vale ressaltar que, devido a utilização do esquema de predição, não existe atraso entre o controle $u(k)$ e o estado predito $\tilde{x}(k)$.

A representação de incertezas através da descrição aditiva, utilizada no modelo (4.1), permite considerar qualquer tipo de desvio entre $x(k+1)$ e a predição de um passo dada por

$$x(k+1|k) = Ax(k) + Bu(k-d).$$

Assim, o efeito de ruído, erros de modelagem e perturbações externas podem ser concentrados em $w(k)$ de forma indistinta.

4.1.1 Descrição das incertezas

A perturbação aditiva que surge em k pode ser obtida no instante $k+1$ através da expressão a seguir

$$w(k) = x(k+1) - Ax(k) - Bu(k-d).$$

Este fato permite estimar o conjunto limitante de incerteza por via experimental de uma forma relativamente simples. Por outro lado, devido à generalidade

da descrição, ela é mais conservadora do que outras representações, a exemplo de inclusões politópicas. As inclusões politópicas, por exemplo, permitem tratar as particularidades de cada tipo de incerteza por meio de formulações mais específicas. Em geral, os limites para $w(k)$ são obtidos de forma experimental com o intuito de simplificar o processo de definição do conjunto \mathbb{W} . Vale ressaltar que este tipo de descrição pode englobar todo tipo de incerteza (erros de modelagem, perturbações externas ou ruído). Estas incertezas se manifestam através da discrepância entre $x(k+1)$ e um valor esperado em k para $x(k+1)$ ($x(k+1|k) = Ax(k) + Bu(k)$).

Em alguns casos específicos, é interessante relacionar determinadas fontes de incertezas com a descrição aditiva. Desta maneira pode-se estudar o efeito de certos tipos de incertezas paramétricas com relação à descrição aditiva. Devido a importância do atraso no contexto deste trabalho, a próxima seção será dedicada ao estudo do efeito do erro de estimação de atraso em função do termo $w(k)$.

4.1.1.1 Incertezas no atraso

4.1.1.1.1 Incertezas menores que o período de amostragem

Inicialmente serão tratadas incertezas no atraso menores do que um período de amostragem (T_s) para posteriormente analisar o caso geral. Considere um sistema em tempo contínuo descrito como segue

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t - L - \delta L) \quad (4.2)$$

com L sendo o atraso nominal, $\delta L \geq 0$ representa o erro de estimação do atraso, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ são os estados em tempo contínuo e $u(t) \in \mathbb{R}^m$ o sinal de controle em tempo contínuo, obtido a partir de um sustentador de ordem zero como descrito a seguir

$$u(t) = u(k), \quad \forall t \in [kT_s, (k+1)T_s).$$

É importante enfatizar que os resultados que virão a ser apresentados podem ser utilizados de maneira análoga para $\delta L < 0$ (OLARU; NICULESCU, 2008). Por simplicidade e sem perda de generalidade, considera-se que o período de amostragem é escolhido de forma que $L = d \cdot T_s$, sendo d um número natural.

A discretização exata pode ser obtida por meio da solução via integral de convolução da Eq. (4.2), obtida nos instantes de amostragem. Como o

sistema em questão é invariante no tempo, basta considerar o intervalo de 0 a T_s . Sabe-se que para o caso nominal ($\delta L = 0$), o modelo é dado por

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k-d)$$

com $A = e^{A_c T_s}$ e $B = \int_0^{T_s} e^{A_c(T_s-\theta)} d\theta B_c$. Contudo, na presença de erro de estimação de atraso, surgirá uma incerteza aditiva como descrito a seguir

$$\begin{aligned} x(k+1) &= e^{A_c T_s} x(k) + \int_0^{\delta L} e^{A_c(T_s-\theta)} d\theta B_c u(k-d-1) \\ &\quad + \int_{\delta L}^{T_s} e^{A_c(T_s-\theta)} d\theta B_c u(k-d) \\ &= e^{A_c T_s} x(k) + \int_0^{\delta L} e^{A_c(T_s-\theta)} d\theta B_c u(k-d-1) \\ &\quad + \int_0^{T_s} e^{A_c(T_s-\theta)} d\theta B_c u(k-d) - \int_0^{\delta L} e^{A_c(T_s-\theta)} d\theta B_c u(k-d) \\ &= Ax(k) + Bu(k-d) + \underbrace{\int_0^{\delta L} e^{A_c(T_s-\theta)} d\theta B_c (u(k-d-1) - u(k-d))}_{w(k)}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Portanto, para o caso com $T_s > \delta L \geq 0$, observa-se que a perturbação aditiva é dada por

$$w(k) = -\Gamma(\delta L)\Delta u(k-d)$$

com $\Gamma(\delta L) = \int_0^{\delta L} e^{A_c(T_s-\theta)} d\theta B_c$. Em Olaru e Niculescu (2008) mostra-se que para $0 > \delta L \geq -T_s$, obtém-se

$$w(k) = \Gamma(\delta L)\Delta u(k-d+1).$$

Este resultado é útil porque demonstra como o erro de estimação no atraso afeta a descrição aditiva de incerteza, assim como relaciona o seu efeito com a magnitude do incremento de controle. Deve-se notar que $w(k)$ é limitado em sistemas com restrições no incremento de controle uma vez que $\Gamma(0) = 0$, $\Gamma(T_s) = B$ e os elementos da matriz $\Gamma(\delta L)$ estão entre os elementos de 0 e B para δL variando entre 0 e T_s . Como consequência, ao se imporem restrições ao sinal de controle, limita-se o seu incremento de maneira indireta, o que garante a existência de um conjunto \mathbb{W} tal que $w(k) \in \mathbb{W}$ para qualquer $k > 0$.

4.1.1.1.2 Incerteza no atraso de qualquer duração

Por fim será considerado o caso em que a incerteza no atraso é maior do que o período de amostragem. Para este problema, a incerteza pode ser dividida numa parcela que é múltipla do período de amostragem e outra parcela formada por um número racional indicados como segue

$$\delta L = \delta d \cdot T_s + \delta L'$$

para um número inteiro δd com $T_s > \delta L' \geq 0$. Assim, definindo $d_r \triangleq d + \delta d$, chega-se à seguinte representação

$$\begin{aligned} x(k+1) = & Ax(k) + Bu(k-d_r) \\ & + \int_0^{\delta L} e^{A_c(T_s-\theta)} d\theta B_c (u(k-d_r-1) - u(k-d_r)) \end{aligned} \quad (4.4)$$

de forma análoga ao caso com $\delta L < T_s$. Somando e subtraindo o termo $Bu(k-d)$ à Eq.(4.4), obtém-se a expressão a seguir

$$\begin{aligned} x(k+1) = & Ax(k) + Bu(k-d) + B(u(k-d_r) - u(k-d)) \\ & - \int_0^{\delta L} e^{A_c(T_s-\theta)} d\theta B_c \Delta u(k-d_r), \end{aligned} \quad (4.5)$$

de tal forma que a incerteza passa a ser descrita por

$$\begin{aligned} w(k) = & -B(u(k-d) - u(k-d_r)) - \Gamma(\delta L)\Delta u(k-d_r) \\ = & -B \sum_{j=d}^{d_r-1} \Delta u(k-j) - \Gamma(\delta L)\Delta u(k-d_r). \end{aligned} \quad (4.6)$$

De maneira similar ao resultado anterior, observa-se que a incerteza aditiva depende dos incrementos de controle e do tamanho da incerteza no atraso. Embora seja possível aplicar o mesmo procedimento a outros tipos de incerteza paramétricas, uma das grandes vantagens desta abordagem está na possibilidade de reunir diversos tipos de incertezas em uma única descrição.

É importante ressaltar que o valor de $w(k)$ pode ser calculado no instante $k+1$ a partir da expressão a seguir

$$w(k) = x(k+1) - Ax(k) - Bu(k).$$

Com efeito, é possível estimar o conjunto \mathbb{W} através de um conjunto de dados experimentais a exemplo de Gruber et al. (2011).

4.1.1.2 Análise das incertezas em representações não-mínimas

Em representações entrada-saída, o efeito das incertezas manifesta-se diretamente na diferença obtida entre a saída medida e a saída esperada. No caso de sistemas com atraso, é importante entender a maneira pela qual o efeito das incertezas se propaga devido a estrutura de compensação de atraso. Com o intuito de utilizar ferramentas de análise de robustez, desenvolvidas para representações em espaço de estados com incerteza aditiva, é necessário estudar a maneira pela qual as incertezas se manifestam nos estados da representação não-mínima.

Como anteriormente, será considerado o modelo ARX utilizado em Wang e Young (1988) dado por

$$y(k+1|k) = -A_1y(k) - A_2y(k-1) - \dots - A_{na-1}y(k-na+1) \\ + B_1u(k) + \dots + B_{nb}u(k-nb+1)$$

ao passo que a saída real é expressa por

$$y(k+1) = -A_1y(k) - A_2y(k-1) - \dots - A_{na-1}y(k-na+1) \\ + B_1u(k) + \dots + B_{nb}u(k-nb+1) + \varepsilon(k).$$

com $\varepsilon(k)$ sendo uma variável de correção que surge devido ao efeito de incertezas. Sejam os estados da representação não-mínima dados por

$$x(k) = [y(k)' \ y(k-1)' \ \dots \ y(k-na+1)' \ u(k-1)' \ u(k-2)' \ \dots \ u(k-nb+1)']'$$

com o seguinte modelo

$$x(k+1) = A_{yu}x(k) + B_{yu}u(k) + w_{yu}(k) \\ y(k) = C_{yu}x(k)$$

sendo $w_{yu}(k)$ a perturbação aditiva.

No instante $k+1$, os estados são determinados por

$$x(k+1) = [y(k+1)' \ y(k)' \ \dots \ y(k-na+2)' \ u(k)' \ u(k-1)' \ \dots \ u(k-nb+2)']'$$

Neste caso, dentre todos os elementos que integram $x(k+1)$, apenas $y(k+1)$ é desconhecido em k . Com efeito, é natural esperar que a perturbação aditiva tenha uma estrutura como segue

$$w_{yu}(k) = [(y(k+1) - y(k+1|k))' \ 0' \ \dots \ 0' \ 0' \ 0' \ \dots \ 0']'.$$

Este fato pode ser verificado considerando a estrutura proposta no Capítulo 3, com $w_{yu}(k)$ sendo dado por

$$\begin{aligned}
 w_{yu}(k) &= x(k+1) - A_{yu}x(k) - B_{yu}u(k) \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} y(k+1)' & \dots & y(k-na+3)' & y(k-na+2)' & u(k)' & \dots & u(k-nb+3)' & u(k-nb+2)' \end{bmatrix}'}_{x(k+1)} \\
 &\quad - \underbrace{\begin{bmatrix} -A_1 & \dots & -A_{na-1} & -A_{na} & B_2 & \dots & B_{nb-1} & B_{nb} \\ I_p & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & I_p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & I_m & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & I_m & 0 \end{bmatrix}}_{A_{yu}} \underbrace{\begin{bmatrix} y(k) \\ \vdots \\ y(k-na+2) \\ y(k-na+1) \\ u(k-1) \\ \vdots \\ u(k-nb+2) \\ u(k-nb+1) \end{bmatrix}}_{x(k)} \\
 &\quad - \underbrace{\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_{yu}} u(k) = \begin{bmatrix} y(k+1) - y(k+1|k) \\ y(k) - y(k) \\ \vdots \\ y(k-na+3) - y(k-na+3) \\ y(k-na+2) - y(k-na+2) \\ u(k-1) - u(k-1) \\ \vdots \\ u(k-nb+3) - u(k-nb+3) \\ u(k-nb+2) - u(k-nb+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon(k) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Desta maneira demonstra-se que, para este tipo de representação, o erro se manifesta apenas nos elementos da incerteza aditiva que estão relacionados à saída $y(k+1)$. Por conseqüência, o mesmo ocorre para a descrição que considera ação de controle incremental ($\Delta u(k)$) ou que representa o sistema predito (via preditor de Smith filtrado). Para o caso do sistema predito, a saída conhecida em k é dada por $y(k+D|k)$ de tal forma que a incerteza se manifesta pelo desvio $y(k+D+1|k+1) - y(k+D+1|k)$. O efeito do preditor de Smith filtrado sobre a incerteza $w_{yu}(k)$ será discutido em detalhes no próximo capítulo.

4.2 PREDITOR ÓTIMO COM COMPENSAÇÃO ROBUSTA

Em controladores com compensação de atraso, as variáveis efetivamente utilizadas para fins de controle são as saídas ou estados preditos. Por outro lado, estas variáveis são utilizadas com o intuito de controlar as saídas

ou estados reais que diferirão dos preditos devido às incertezas. As próximas seções serão dedicadas ao estudo do efeito da incerteza nas variáveis preditas.

4.2.1 Análise de incertezas na predição

Foi discutido no Capítulo 2 que pode-se estimar o valor do estado $x(k+d)$ por meio do preditor a seguir

$$x(k+d|k) = A^d x(k) + \sum_{j=1}^d [A^{j-1} Bu(k-j)]. \quad (4.7)$$

Considerando a mudança de variável dada por

$$\tilde{x}(k) \triangleq x(k+d|k), \quad (4.8)$$

recai-se num modelo de predição sem atraso descrito como segue

$$\tilde{x}(k+1|k) = A\tilde{x}(k) + Bu(k), \quad y(k+d|k) = C\tilde{x}(k). \quad (4.9)$$

No caso nominal, a predição é idêntica ao valor futuro do estado ($x(k+d) = \tilde{x}(k)$), de maneira que a Eq. (4.9) é válida. No entanto, na presença de incertezas, $x(k+d) \neq \tilde{x}(k)$ e a dinâmica nominal sem atraso não descreve perfeitamente o comportamento da predição ($\tilde{x}(k+1|k) \neq A\tilde{x}(k) + Bu(k)$). A discrepância entre a predição em $k+1$ ($\tilde{x}(k+1)$) e o valor esperado dadas as informações em k ($\tilde{x}(k+1|k)$) também pode ser considerada por meio de uma perturbação predita $\tilde{w}(k)$ na forma a seguir

$$\tilde{x}(k+1) = A\tilde{x}(k) + Bu(k) + \tilde{w}(k) \quad (4.10)$$

com $\tilde{w}(k)$ representando qualquer discrepância entre $\tilde{x}(k+1)$ e $\tilde{x}(k+1|k)$. Vale enfatizar que se $w(k) = 0$ para todo k , então $\tilde{x}(k+1) = x(k+d+1)$, $\tilde{x}(k) = x(k+d)$ e $x(k+d+1) = Ax(k+d) + Bu(k)$ o que implica em $\tilde{w}(k) = 0$. Portanto, a perturbação predita é causada pelo efeito da perturbação $w(k)$ no estado predito $\tilde{x}(k+1)$.

A partir da Eq. (4.10), pode-se obter $\tilde{w}(k)$ por meio da relação a seguir

$$\tilde{w}(k) = \tilde{x}(k+1) - A\tilde{x}(k) - Bu(k). \quad (4.11)$$

Então, substituindo as Eqs. (4.7) e (4.8) para k e $k + 1$ na Eq. (4.11), obtém-se

$$\begin{aligned}\tilde{w}(k) &= A^d x(k+1) + \sum_{j=1}^d [A^{j-1} Bu(k-j+1)] \\ &\quad - A \left\{ A^d x(k) + \sum_{j=1}^d [A^{j-1} Bu(k-j)] \right\} - Bu(k) \\ &= A^d [x(k+1) - Ax(k) - Bu(k-d)].\end{aligned}\quad (4.12)$$

Finalmente, substituindo a Eq. (4.1) na Eq. (4.12), chega-se a

$$\tilde{w}(k) = A^d w(k). \quad (4.13)$$

Este resultado é interessante porque para um dado sistema com incertezas, a perturbação predita $\tilde{w}(k)$ é unicamente determinada por $w(k)$. Como consequência, o conjunto limitante da perturbação predita pode ser obtido diretamente do conjunto limitante original. Em outras palavras, para $w(k) \in \mathbb{W}$, verifica-se

$$\tilde{w}(k) \in A^d \mathbb{W} \triangleq \tilde{\mathbb{W}}.$$

4.2.2 Análise do erro de predição

Ao se considerarem restrições nos estados, é necessário garantir satisfação robusta de restrições para o estado real $x(k)$ ao invés do estado predito $\tilde{x}(k)$. Portanto, é necessário determinar um limitante para a diferença entre a saída real e a predição que se utiliza para fins de controle.

O erro de predição será definido por

$$e(k) \triangleq x(k) - x(k|k-d) = x(k) - \tilde{x}(k-d). \quad (4.14)$$

Assim, iterando a Eq. (4.1) recursivamente a partir de $x(k-d+1)$ até $x(k)$, pode-se reescrever $x(k)$ como

$$x(k) = A^d x(k-d) + \sum_{j=1}^d [A^{j-1} Bu(k-j-d)] + \sum_{j=1}^d [A^{j-1} w(k-j)]. \quad (4.15)$$

Por outro lado, $\tilde{x}(k-d)$ é obtido a partir de $x(k|k-d)$ por meio das Eqs. (4.7)

e (4.8) o que resulta em

$$\tilde{x}(k-d) = A^d x(k-d) + \sum_{j=1}^d [A^{j-1} B u(k-j-d)]. \quad (4.16)$$

Finalmente pode-se obter a expressão do erro de predição substituindo as Eqs. (4.16) e (4.15) na Eq. (4.14), obtendo-se

$$e(k) = A^{d-1} w(k-d) + A^{d-2} w(k-d+1) + \dots + w(k-1). \quad (4.17)$$

Devido à descrição de incertezas considerada, a perturbação aparece de forma cumulativa no erro de predição. Considerando que $w(k)$ pertence a \mathbb{W} , então o erro de predição pode ser limitado por

$$\mathbb{E} = A^{d-1} \mathbb{W} \oplus A^{d-2} \mathbb{W} \dots \oplus \mathbb{W}. \quad (4.18)$$

A importância deste conjunto limitante deve-se à seguinte propriedade

$$\tilde{x}(k) \in \mathbb{X} \ominus \mathbb{E} \triangleq \tilde{\mathbb{X}}, \quad \forall k \geq 0 \Rightarrow x(k) \in \mathbb{X}, \quad \forall k \geq d$$

que pode ser demonstrada a partir da definição da diferença de Pontryagin.

Esta propriedade permite definir um conjunto de restrições mais conservador do que o conjunto original (\mathbb{X}), de tal maneira que ao se garantir que a predição pertence a este conjunto, assegura-se que a saída real respeitará as restrições originais.

Uma representação esquemática, que equivale ao sistema com compensação de atraso explícita, é apresentada na Fig. 33 com

$$\Phi = \sum_{j=1}^d A^{j-1} z^{-j}.$$

Nela ilustra-se que o sistema com atraso pode ser controlado a partir de um sistema sem atraso, afetado por uma perturbação modificada. Deve-se notar que a perturbação predita $\tilde{w}(k)$ não depende de perturbações futuras $w(k+j)$, $j > 0$, o que é natural uma vez que o esquema de predição é causal.

4.2.3 Efeito do preditor na presença de incertezas

Sabe-se que o tamanho do atraso afeta as margens de estabilidade em estratégias de controle clássico. Este fato pode induzir à falsa idéia de que os sistemas em malha fechada são necessariamente menos robustos para atrasos

atraso e δk_p é o erro no ganho. Em espaço de estados, este sistema pode ser descrito por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= ax(k) + (1 + \delta k_p)(1 - a)u(k - d - \delta d) \\ y(k) &= x(k). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Por meio de um procedimento similar ao da Seção 4.1.1.1, pode-se reescrever o sistema (4.19) na forma

$$\begin{aligned} x(k+1) &= ax(k) + (1 - a)u(k - d) + \underbrace{(a - 1) \left[\sum_{j=1}^{\delta d} \Delta u(k - d - j) - u(k - d - \delta d) \right]}_{w(k)} \\ y(k) &= x(k) \end{aligned}$$

de maneira que a incerteza $w(k)$ é causada pelo erro de estimação do atraso e do ganho. Como não há restrições no incremento de controle, não são estabelecidos os limites para $w(k)$. No entanto, numa situação real, o conjunto \mathbb{W} poderia ser estabelecido devido às limitações físicas dos atuadores.

Para fins de discussão serão considerados quatro casos, combinando valores distintos do pólo e do atraso do sistema: i,ii) $a = 0.95$ com $d = 1$ e $d = 15$ e iii,iv) $a = 1.05$ com $d = 1$ e $d = 15$. As simulações serão realizadas partindo do ponto de operação $y(0) = 1$ com $u(-d) = u(-d + 1) = \dots = u(-1) = 1/(1 + \delta k_p)$. A partir de $k = 0$, aplica-se a lei de controle $u(k) = Ky(k + d|k)$ com $y(k + d|k) = x(k + d|k) = \tilde{x}(k)$ obtido da Eq. (3.3). O ganho K é definido através da técnica de alocação de pólos com $K = (b - a)/(1 - a)$, sendo $b = 0.7$ o pólo de malha fechada desejado. Deve-se notar que $\tilde{w}(k) = aw(k)$ para $d = 1$ e $\tilde{w}(k) = a^{15}w(k)$ para $d = 15$ sendo

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1) &= a\tilde{x}(k) + (1 - a)u(k) + \tilde{w}(k) \\ y(k + d|k) &= \tilde{x}(k) \end{aligned}$$

o sistema predito em espaço de estados.

Na Fig. 34 são apresentadas as respostas obtidas para o caso estável com $d = 1$ e $d = 15$, ao passo que os casos instáveis são apresentados na Fig. 35 para os mesmos valores de atraso. Como esperado, o comportamento dinâmico é o mesmo nos casos nominais uma vez que os pólos de malha fechada foram alocados em 0.7. Ao considerar incertezas, o atraso maior induziu a um efeito desestabilizador para o modelo instável, ao passo que apresentou um comportamento estabilizador para o caso estável. Este resultado decorre do efeito que a compensação de atraso causa na perturbação do sistema predito o qual, por sua vez, depende da dinâmica do sistema em malha aberta. Vale

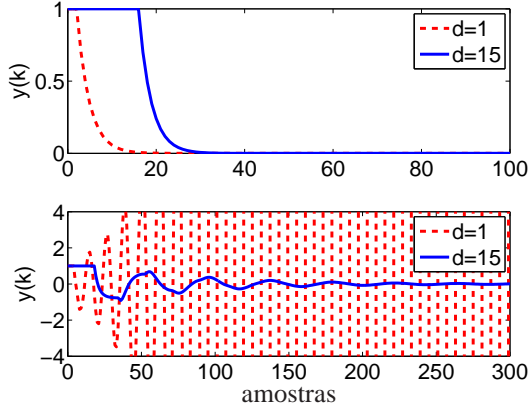


Figura 34 – Resposta para o sistema estável: caso nominal ($\delta k_p = 0$, $\delta d = 0$) - acima, caso com incerteza ($\delta k_p = 2$, $\delta d = 2$) - abaixo.

ressaltar que o preditor ótimo apresentará os mesmos problemas de amplificação de ruído nas altas frequências discutidos no Capítulo 2 uma vez que o ganho A^d é constante para todas as frequências.

Este resultado é particularmente interessante quando se analisa o comportamento de controladores tipo GPC. No Capítulo 1 foi apresentado um exemplo em que o atraso mais longo teve um efeito desestabilizador para um modelo estável em malha aberta ($|a| < 1$). À primeira vista, este caso parece contradizer os resultados recém apresentados. Na realidade, este comportamento decorre da inclusão da ação integral no modelo de predição do GPC. Isto pode ser verificado por meio do modelo equivalente apresentado no Capítulo 3. Para o caso do sistema de primeira ordem com atraso considerado, o modelo de predição equivalente é obtido considerando $A_1 = -a$ e $B_1 = (1 - a)$. A inclusão do integrador resulta nos termos $\tilde{A}_1 = -a - 1$ e $\tilde{A}_2 = a$ o que leva à seguinte descrição

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} a+1 & -a \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1-a \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u(k-d) \quad (4.20)$$

$$y(k) = [1 \ 0] x(k). \quad (4.21)$$

Com efeito, a inclusão da ação integral faz com que a norma induzida da matriz A seja maior ou igual a 1. A título de exemplo, considere o caso do Capítulo 1 no qual foi considerado $a = e^{-0.2/2}$, o que leva aos seguintes

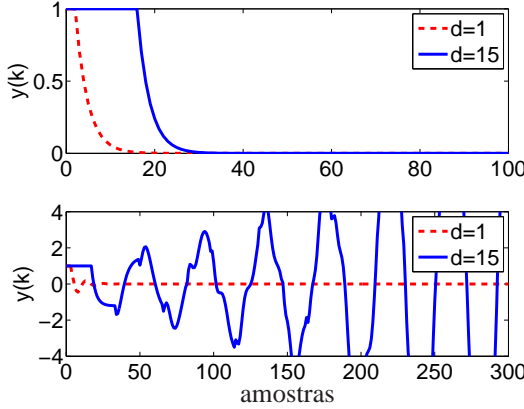


Figura 35 – Resposta para o sistema estável: caso nominal ($\delta k_p = 0$, $\delta d = 0$) - acima, caso com incerteza ($\delta k_p = 0.5$, $\delta d = 1$) - abaixo.

valores de A^d :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2.72 & -1.72 \\ 1.90 & -0.90 \end{bmatrix}, \quad A^{20} = \begin{bmatrix} 9.22 & -8.22 \\ 9.09 & -8.09 \end{bmatrix}.$$

Vale lembrar que para este caso, verifica-se

$$\begin{aligned} w(k) &= x(k+1) - Ax(k) - B\Delta u(k) \\ &= \begin{bmatrix} y(k+1) \\ y(k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a+1 & -a \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1-a \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u(k-d) \\ &= \begin{bmatrix} y(k+1) - (a+1)y(k) - ay(k-1) - (1-a)\Delta u(k-d) \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Finalmente pode-se concluir que a incerteza que efetivamente afeta a predição ($\tilde{x}(k)$) é dada por $\tilde{w}(k) = [2.72 \ 1.90]'w_y(k)$ para $d = 2$ e $\tilde{w}(k) = [9.22 \ 9.09]'w_y(k)$ para $d = 20$. Isso justifica os problemas associados à robustez do GPC para sistemas com atraso longo num contexto de modelos em espaço de estados. Esta interpretação é particularmente útil para tratar sistemas como restrições uma vez que os modelos em espaço de estados são utilizados no contexto da teoria de Lyapunov. Vale ressaltar que, devido à ausência de restrições no controle, a incerteza $w(k)$ não pode ser limitada. Contudo, na prática, a ação controle apresenta saturação em decorrência dos limites físicos. A seguir será estudada a estabilidade e satisfação robusta de restrições a partir das análises realizadas.

4.2.3.1 Estabilidade robusta e satisfação de restrições

A análise do erro de predição e do efeito do preditor na presença de incertezas permite compreender a maneira pela qual as discrepâncias afetam o modelo predito. No entanto, é importante assegurar que as especificações do sistema real serão atendidas. A seguir será proposto um lema que permite relacionar a estabilidade do sistema real com a do sistema predito, controlados por uma lei estabilizante dada por $\kappa(x(k+d|k))$.

Lemma. 1.

(i) *Seja um sistema com atraso descrito por*

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k-d) + w(k)$$

com $w(k) \in \mathbb{W}$, controlado por

$$u(k) = \kappa(\tilde{x}(k)),$$

$$\tilde{x}(k) = A^d x(k) + \sum_{j=1}^d [A^{j-1} Bu(k-j)].$$

(ii) *Sejam os conjuntos $\tilde{\mathbb{W}}$ e \mathbb{E} definidos de tal forma que*

$$\tilde{x}(k+1) - A\tilde{x}(k) - Bu(k) \in \tilde{\mathbb{W}}, \quad \forall k > 0,$$

$$x(k) - \tilde{x}(k-d) \in \mathbb{E}, \quad \forall k > d.$$

(iii) *Seja um sistema na forma*

$$\tilde{x}(k+1) = A\tilde{x}(k) + B\kappa(\tilde{x}(k)) + \tilde{w}(k)$$

estável entrada-estado (ISS²) com um domínio de atração Ω para todo $\tilde{w}(k)$ satisfazendo $\tilde{w}(k) \in \tilde{\mathbb{W}}$.

Então:

(a) *O sistema (i) é ISS para todo $\tilde{x}(0)$ pertencente a Ω ou, alternativamente, para todo $x(d)$ pertencente a $\Omega \oplus \mathbb{E}$.*

(b) *Se $\tilde{x}(k) \in \mathbb{X} \ominus \mathbb{E}, \forall k \geq 0$, então $x(k) \in \mathbb{X}, \forall k \geq d$.*

²As definições relativas à estabilidade entrada-estado são apresentadas no Apêndice D.1.

Prova.

Dividindo a prova em duas partes:

(a) A prova decorre diretamente da equivalência das representações. Como visto anteriormente, o sistema (i) pode ser representado na forma

$$\begin{aligned}\tilde{x}(k+1) &= A\tilde{x}(k) + Bu(k) + \tilde{w}(k); \\ x(k) &= \tilde{x}(k) + e(k).\end{aligned}$$

com $u(k) = \kappa(\tilde{x}(k))$, $\tilde{w}(k)$ dado pela Eq. (4.13) e $e(k)$ dado pela Eq. (4.17). Portanto, da condição (ii), conclui-se que o sistema apresentado em (i) é ISS devido à equivalência das representações. Além disso, o seu domínio de atração é o mesmo do apresentado pelo sistema na condição (iii). Como indicado no Apêndice D.1, este fato assegura que a trajetória descrita por $\tilde{x}(k)$ é limitada por um conjunto Θ e, por consequência, $x(k) \in \Theta \oplus \mathbb{E}$.³

(b) Neste caso, ao se cumprir a condição $\tilde{x}(k) \in \mathbb{X} \oplus \mathbb{E}$, $\forall k \geq 0$, da definição da diferença de Pontryagin verifica-se $\tilde{x}(k) \oplus \mathbb{E} \subseteq \mathbb{X}$, $\forall k \geq 0$ ou $\tilde{x}(k-d) \oplus \mathbb{E} \subseteq \mathbb{X}$, $\forall k \geq d$. Por fim, a partir da análise do erro de predição sabe-se que $x(k) \in \tilde{x}(k-d) \oplus \mathbb{E} \subseteq \mathbb{X}$, o que demonstra o item (b). \square

O Lema 1 é utilizado para demonstrar que a estabilidade robusta do sistema com atraso pode ser garantida a partir da análise de um sistema sem atraso, afetado por uma incerteza modificada. Como consequência, o problema de análise e síntese de sistemas lineares com atraso e restrições reduz-se ao caso sem atraso. Além da estabilidade, o Lema 1 permite garantir satisfação robusta de restrições, utilizando a predição e um conjunto de restrições mais conservador. Este resultado é geral uma vez que a lei de controle $u(k) = \kappa(\tilde{x}(k))$ não foi determinada. Note que possíveis restrições no controle devem estar implícitas na função $\kappa(\cdot)$. Assim, pode-se considerar qualquer estratégia que garanta estabilidade entrada-estado para sistemas lineares sem atraso sujeito a perturbações aditivas. Na sequência será discutido o problema em que existem estados que não são mensuráveis.

4.3 ESTIMADOR DE ESTADOS PARA SISTEMAS COM ATRASO

Nos problemas em que os estados não são mensuráveis, é necessário utilizar de alguma técnica de estimação com o objetivo de aplicar estratégias de controle baseadas na informação dos estados. De maneira similar ao proposto em (MAYNE et al., 2006), será utilizado um estimador de Luenberger

³O argumento de prova, obtido diretamente a partir da definição de estabilidade entrada-estado, é apresentado no Apêndice D.2.

devido à simplicidade de implementação e de análise. Neste caso, o sistema passa a ser descrito como segue

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k-d) + w(k) \\ y(k) &= Cx(k) + v(k) \end{aligned} \quad (4.22)$$

com $x(k) \in \mathbb{R}^n$ sendo o vetor de estados atuais, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ sendo o sinal de controle, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ são as saídas mensuráveis, $w(k) \in \mathbb{R}^n$ são incertezas aditivas nos estados e $v(k) \in \mathbb{R}^n$ são incertezas nas saídas. Além das hipóteses anteriores, assume-se que $v(k)$ pertence a um conjunto poliedral convexo e compacto \mathbb{V} .

Devido ao efeito do atraso, considera-se a dinâmica do estimador de Luenberger como descrita a seguir

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k-d) + L(y(k) - C\hat{x}(k)). \quad (4.23)$$

sendo $\hat{x}(k)$ a estimação de $x(k)$. Assim como no caso sem atraso, o erro de estimação, representado por $\delta(k) \triangleq x(k) - \hat{x}(k)$, pode ser obtido desde as Eq. (4.22) e (4.23) como segue

$$\delta(k+1) = (A - LC)\delta(k) + w(k) - Lv(k). \quad (4.24)$$

Consequentemente, se todos os autovalores da matriz $A_L \triangleq A - LC$ estão estritamente no interior do círculo unitário, com $w(k)$ e $v(k)$ limitados por um conjunto finito, então pode-se demonstrar que $\delta(k)$ também é limitado. Como discutido em (KOLMANOVSKY; GILBERT, 1998), o sinal $\delta(k)$ pode ser limitado por uma aproximação exterior do mínimo conjunto positivamente invariante robusto (mrpi), dado por

$$\Delta = \bigoplus_{j=0}^{\infty} A_L^j [\mathbb{W} \oplus (-L\mathbb{V})],$$

se $\delta(0) \in \Delta$. Uma aproximação externa invariante para Δ , ou seja, tal que $A_L \bar{\Delta} \oplus (\mathbb{W} \oplus -L\mathbb{V}) \subseteq \bar{\Delta}$ com $\Delta \subseteq \bar{\Delta}$, pode ser obtida a partir de algoritmos especializados como o proposto em (RAKOVIC et al., 2005).

4.3.1 Compensação de atraso com estimador de estados

De forma análoga ao problema sem estimador, o esquema de controle é descrito na Fig. 36 com o bloco de compensação e predição calculado como

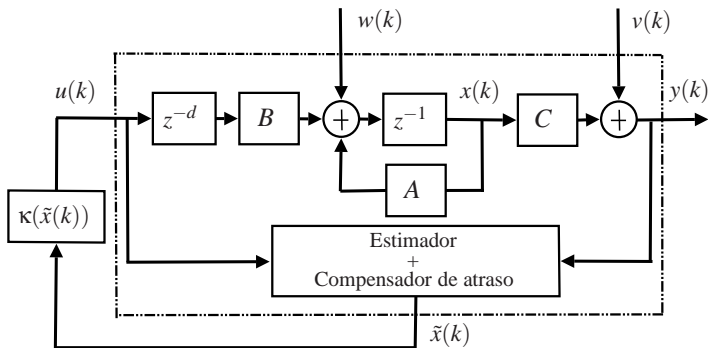


Figura 36 – Esquema de controle com estimação de estados e compensação de atraso.

segue

$$\tilde{x}(k) = A^d \hat{x}(k) + \sum_{j=1}^d [A^{j-1} B u(k-j)] \quad (4.25)$$

$$\hat{x}(k+1) = A \hat{x}(k) + B u(k-d) + L(y(k) - C \hat{x}(k)). \quad (4.26)$$

Neste caso, $\tilde{x}(k) \triangleq \hat{x}(k+d|k)$ é a saída do sistema predito equivalente, composto pela conexão do sistema real (4.22) com o esquema de predição das Eqs. (4.25) e (4.26), como ilustrado na Fig. 36.

Assim como no caso sem estimador de estados, verifica-se que $\tilde{x}(k) \neq x(k+d)$ na presença de perturbações e/ou erro de estimação. Por outro lado, utiliza-se $\tilde{x}(k)$ para definição da lei de controle. Portanto deve-se considerar os efeitos das incertezas e do erro de estimação por meio de uma representação equivalente como segue

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1) &= A \tilde{x}(k) + B u(k) + \tilde{w}(k), \\ y(k) &= C \tilde{x}(k-d) + C e(k) + v(k), \\ e(k) &\triangleq x(k) - \tilde{x}(k-d), \end{aligned} \quad (4.27)$$

sendo $\tilde{w}(k)$ a nova perturbação predita e $e(k)$ o novo erro de predição, os quais devem ser relacionados a $w(k)$, $v(k)$ e $\delta(k)$.

4.3.2 Análise de incertezas na predição

A perturbação predita pode ser calculada a partir das Eqs. (4.27) e (4.25) em função de $\hat{x}(k)$ como segue

$$\begin{aligned}
 \tilde{w}(k) &= \tilde{x}(k+1) - A\tilde{x}(k) - Bu(k) \\
 &= A^d \hat{x}(k+1) + \sum_{j=1}^d [A^{j-1} Bu(k-j+1)] \\
 &\quad - A \left\{ A^d \hat{x}(k) + \sum_{j=1}^d [A^{j-1} Bu(k-j)] \right\} - Bu(k) \\
 &= A^d [\hat{x}(k+1) - A\hat{x}(k) - Bu(k-d)]. \tag{4.28}
 \end{aligned}$$

Num segundo momento, utilizando a expressão do estimador de Luenberger (4.26), pode-se reescrever a Eq. (4.28) da seguinte forma

$$\tilde{w}(k) = A^d [L(y(k) - C\hat{x}(k))] = A^d LC\delta(k) + v(k). \tag{4.29}$$

Este resultado equivale ao apresentado em (MAYNE et al., 2006) para $d = 0$.

4.3.3 Análise do erro de predição

No caso do erro de predição, o desvio entre o estado real e o predito é dado por

$$e(k) = x(k) - \tilde{x}(k-d). \tag{4.30}$$

Assim, considerando Eq. (4.25) em $k-d$, obtém-se a expressão

$$\tilde{x}(k-d) = A^d \hat{x}(k-d) + \sum_{j=1}^d [A^{j-1} Bu(k-j-d)]. \tag{4.31}$$

De maneira similar ao caso sem estimador, pode-se expressar $x(k)$ com relação a $x(k-d)$. Para tanto, basta expandir a Eq. (4.22) recursivamente de $k-d$ até k , o que resulta na expressão a seguir

$$x(k) = A^d x(k-d) + \sum_{j=1}^d [A^{j-1} Bu(k-j-d)] + \sum_{j=1}^d [A^{j-1} w(k-j)]. \tag{4.32}$$

Finalmente, substituindo as Eqs. (4.31) e (4.32) em (4.30) resulta no erro de predição dado por

$$e(k) = A^d \delta(k-d) + \sum_{j=1}^d [A^{j-1} w(k-j)]. \quad (4.33)$$

Como poderia ser esperado, o erro de predição é dado pelo erro do caso sem estimador mais uma parcela induzida pelo erro de estimação. Quando o estimador converge, $\delta(k-d) \rightarrow 0$ e o erro de predição recai no caso anterior.

4.3.3.1 Estabilidade robusta e satisfação de restrições

Como apontado na seção 4.3, se o estimador é estável, pode-se definir um conjunto limitante da incerteza predita $\tilde{\mathbb{W}}$ de maneira a assegurar a seguinte condição

$$\tilde{w}(k) \in \tilde{\mathbb{W}}, \forall v(k) \in \mathbb{V}, \forall w(k) \in \mathbb{W}, \forall k.$$

O mesmo ocorre com o erro de predição que pode ser limitado por um conjunto finito \mathbb{E} definido por

$$e(k) \in \mathbb{E}, \forall v(k) \in \mathbb{V}, \forall w(k) \in \mathbb{W}, \forall k.$$

Uma maneira para obter os conjuntos limitantes da incerteza predita do erro de predição, é através de uma aproximação externa para o mínimo conjunto positivamente invariante robusto, como discutido brevemente no início desta seção. Partindo das Eqs.(4.32) e (4.33), os seguintes conjuntos limitantes podem ser definidos:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{W}} &\subseteq A^d L(\overline{C\Delta} \oplus -\mathbb{V}), \\ \mathbb{E} &\subseteq \mathbb{W} \oplus A\mathbb{W} \oplus \dots \oplus A^{d-1}\mathbb{W} \oplus A^d \overline{\Delta}. \end{aligned}$$

onde $\overline{\Delta}$ é uma aproximação invariante externa, supondo uma perturbação limitada por $\mathbb{W} \oplus (-L\mathbb{V})$. É importante observar que definindo $\overline{\Delta}$ como proposto em (MAYNE et al., 2006), supõe-se que $\hat{x}(0) - x(0) \in \overline{\Delta}$. Esta não é uma condição dura uma vez que pode-se operar com o estimador em malha aberta antes de dar a partida do controlador, de maneira a assegurar a convergência do estimador.

Finalmente pode-se estabelecer um Lema análogo ao caso sem estimador.

Lemma. 2.

(i) *Seja um sistema com atraso descrito por*

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k-d) + w(k) \\ y(k) &= Cx(k) + v(k) \end{aligned}$$

com $w(k) \in \mathbb{W}$ e $v(k) \in \mathbb{V}$ controlado por

$$\begin{aligned} u(k) &= \kappa(\tilde{x}(k)), \\ \tilde{x}(k) &= A^d \hat{x}(k) + \sum_{j=1}^d [A^{j-1} Bu(k-j)], \\ \hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + Bu(k-d) + L(y(k) - C\hat{x}(k)). \end{aligned}$$

(ii) *Sejam os conjuntos $\tilde{\mathbb{W}}$ e \mathbb{E} definidos de tal forma que*

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1) - A\tilde{x}(k) - Bu(k) &\in \tilde{\mathbb{W}}, \quad \forall k > 0, \\ x(k) - \tilde{x}(k-d) &\in \mathbb{E}, \quad \forall k > d. \end{aligned}$$

(iii) *Seja um sistema na forma*

$$\tilde{x}(k+1) = A\tilde{x}(k) + B\kappa(\tilde{x}(k)) + \tilde{w}(k)$$

estável entrada-estado (ISS) com um domínio de atração Ω para todo $\tilde{w}(k)$ satisfazendo $\tilde{w}(k) \in \tilde{\mathbb{W}}$.

Então:

(a) *O sistema (i) é ISS com um domínio $\tilde{x}(0) \in \Omega \Rightarrow x(0) \in \Omega \oplus \mathbb{E}$.*

(b) *Se $\tilde{x}(k) \in \mathbb{X} \ominus \mathbb{E}, \forall k \geq 0$, então $x(k) \in \mathbb{X}, \forall k \geq d$.*

O argumento de prova será omitido pois o mesmo é análogo ao do Lema 1. Este lema apresenta características similares ao caso sem estimador: i) restrições nos estados podem ser garantidas impondo condições mais conservadoras ao estado predito $\tilde{x}(k)$; b) restrições no controle podem ser garantidas definindo uma lei de controle $\kappa(\cdot)$ que considera o efeito da saturação e c) permite aplicar técnicas de análise e síntese de controladores para sistemas sem atraso em problemas com atraso, garantindo estabilidade e satisfação robusta de restrições. De fato pode-se demonstrar que este resultado é uma generalização para o caso anterior impondo estados conhecidos, $\hat{x}(k) = x(k)$. Desta maneira chega-se às mesmas expressões do erro de predição e da perturbação predita que as obtidas no caso com estados mensuráveis.

4.4 ESTRATÉGIAS ROBUSTAS

Nesta seção, o esquema de compensação de atraso com estimação de estados será utilizado em conjunto com técnicas de controle para sistemas sem atraso. Serão aplicadas estratégias que permitem garantir estabilidade entrada-estado e satisfação de restrições para determinados conjuntos invariantes robustos e admissíveis Λ . Na primeira delas será implementada uma realimentação de estados linear, ao passo que na outra será considerado um algoritmo de controle preditivo robusto baseado em tubos.

Inicialmente, com vistas a assegurar as condições do item (ii) do Lema 2, utiliza-se a idéia de (MAYNE et al., 2006) para determinação dos conjuntos limitantes da incerteza, como discutido na Seção 4.3. Assim, os limites para $\tilde{w}(k)$ e $e(k)$ são dados respectivamente por

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{W}} &= A^d L(C\bar{\Delta} \oplus -\mathbb{V}) \\ \mathbb{E} &= \mathbb{W} \oplus A\mathbb{W} \oplus \dots \oplus A^{d-1}\mathbb{W} \oplus A^d\bar{\Delta}.\end{aligned}$$

Posteriormente faz-se necessário definir a lei de controle $u(k) = \kappa(\tilde{x}(k))$ com a qual se deve garantir a condição (iii) do referido lema.

4.4.1 Controlador linear

A discussão inicia-se com um controlador simples na forma $\kappa(\tilde{x}(k)) = K\tilde{x}(k)$, o qual baseia-se numa realimentação linear robusta apresentada em (LIMON et al., 2008). Sem perda de generalidades, considere que as restrições no controle foram reescritas na forma

$$\mathbb{U} = \{u : |l_j u| < 1, j = 1, \dots, n_{ru}\}$$

para as restrições nos estados na forma

$$\mathbb{X} \ominus \mathbb{E} = \{\tilde{x} : |h_i \tilde{x}| < 1, i = 1, \dots, n_{rx}\}.$$

O problema de definição do ganho K e do domínio de atração que permitem garantir a satisfação de restrições e a estabilidade entrada-estado pode ser

posto através do seguinte problema de otimização convexa:

$$\min_{Y, Q} \quad -\log(\det(Q)) \quad (4.34)$$

s.t.

$$\begin{bmatrix} \lambda Q & 0 & (AQ + BY)' \\ 0 & 1 - \lambda & w'_v \\ AQ + BY & w_v & Q \end{bmatrix} > 0, \forall w_v \in \text{vert}(\tilde{W}) \quad (4.35)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & Y \\ Y' & I_j Q \end{bmatrix} > 0, j = 1, \dots, n_{ru} \quad (4.36)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & (Qh_i)' \\ Qh_i & Q \end{bmatrix} > 0, i = 1, \dots, n_{rx} \quad (4.37)$$

para um dado $\lambda \geq 0$. Se existir solução admissível, então $\tilde{x}'Q^{-1}\tilde{x} < 1$ é um conjunto invariante robusto para o sistema $\tilde{x}(k+1) = A\tilde{z}(k) + Bu(k) + \tilde{w}(k)$, controlado por $u(k) = YQ^{-1}\tilde{x}(k)$, sob as restrições $x(k) \in \mathbb{X} \ominus \mathbb{E}$ e $u(k) \in \mathbb{U}$, sujeito à incerteza $\tilde{w}_z(k) \in \tilde{W}$.

A discussão com relação aos detalhes desta estratégia não está no escopo deste trabalho. A principal idéia deste exemplo é mostrar como a estratégia de compensação de atraso, proposta neste capítulo, pode ser utilizada para controlar sistemas com atraso e restrições de forma robusta. Contudo, as principais características podem ser ressaltadas em linhas gerais: a desigualdade matricial (4.35) é utilizada para garantir invariância robusta (LIMON et al., 2008); as restrições no controle e nos estados são asseguradas como em Boyd et al. (1994), através das desigualdades matriciais (4.36) e (4.37) respectivamente e o critério (4.34) é utilizado para obter o maior elipsóide (em volume) contido no politopo formado pelas restrições. Desta maneira são asseguradas as condições para provar a estabilidade entrada-estado e a satisfação robusta de restrições do sistema controlado pela lei linear proposta em conjunto com o estimador de Luenberger e o compensador de atraso.

4.4.2 MPC baseado em tubo

Com o objetivo de aumentar o domínio de atração, melhorando o desempenho do sistema de malha fechada, será apresentada uma estratégia de controle preditivo robusto baseada na noção de tubos. Esta estratégia, apresentada em (MAYNE; SERON; RAKOVIC, 2005), permite garantir estabilidade e satisfação robusta de restrições utilizando uma trajetória nominal cujo valor inicial, \bar{x}_0 , é uma variável de decisão do problema de otimização e representa o centro do tubo. Devido ao resultado do Lema 2, o algoritmo

de (MAYNE; SERON; RAKOVIC, 2005) pode ser aplicado a sistemas com atraso ao considerar-se o conjunto de incertezas modificado $\tilde{\mathbb{W}}$ ao invés do original \mathbb{W} e o conjunto de restrições mais conservador $\mathbb{X} \ominus \mathbb{E}$ ao invés das restrições reais \mathbb{X} . Assim, o problema de otimização para obtenção da lei de controle robusta torna-se

$$\min_{\bar{x}_0, \bar{u}_i} V_N(\tilde{x}(k); \bar{x}, \bar{u}) = \sum_{i=0}^{N-1} \ell(\bar{x}_i, \bar{u}_i) + V_f(\bar{x}_N) \quad (4.38)$$

s.a.

$$\bar{x}_0 \in \tilde{x}(k) \oplus (-Z)$$

$$\bar{x}_{i+1} = A\bar{x}_i + B\bar{u}_i, \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

$$(\bar{x}_i, \bar{u}_i) \in \bar{\mathbb{X}} \times \bar{\mathbb{U}}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\bar{x}_N \in X_f.$$

onde:

- i) $\tilde{x}(k)$ é dado por (4.25, 4.26);
- ii) K_w e K_f são ganhos estabilizantes tais que todos os autovalores das matrizes $A + BK_w$ e $A + BK_f$ estão estritamente no interior do círculo unitário;
- iii) Z é uma aproximação invariante exterior do mrpi tal que $(A + BK_w)Z \oplus \tilde{W} \subseteq Z$;
- iv) $\bar{\mathbb{X}} = \mathbb{X} \ominus \mathbb{E} \ominus Z$ e $\bar{\mathbb{U}} = \mathbb{U} \ominus K_w Z$ são conjuntos não vazios;
- v) X_f é um conjunto invariante admissível que respeita $(A + BK_f)X_f \subset X_f$, $X_f \subset \bar{\mathbb{X}}$, $U_f \subset K_f \bar{\mathbb{U}}$;
- vi) $V_f((A + BK_f)x) + \ell(x, K_fx) \leq V_f(x)$, $\forall x \in X_f$;
- vii) $u(k) = \kappa(\tilde{x}(k)) = \bar{u}_0^*(k) + K_w(\bar{x}_0^*(k) - \tilde{x}(k))$ com $\bar{u}_0^*(k)$ e $\bar{x}_0^*(k)$ sendo o argumento que minimiza (4.38) em k .

A matriz de ganho K_w caracteriza o comportamento do sistema de malha fechada na presença de perturbações. Ela pode ser definida de maneira a minimizar o conjunto, assegurando a condição **iv**, por meio de técnicas de otimização convexa apresentadas em Limon et al. (2008). A matriz de ganhos K_f , o conjunto terminal e o custo terminal são os mesmos elementos estabilizantes apresentados no Capítulo 1 e podem ser obtidos a partir do problema ótimo de horizonte infinito sem restrições como em Mayne, Seron e Rakovic (2005).

No caso do controlador preditivo baseado em tubos, o pior efeito das incertezas preditas ($\tilde{w}(k)$) é representado pelo conjunto \mathcal{Z} . Isto permite relaxar as predições nominais, utilizadas no MPC baseado em tubos, de maneira que o primeiro estado do horizonte de predição não é $x(k)$, mas sim um estado x_0 , que relaciona-se com $x(k)$ através da restrição

$$x(k) - \bar{x}_0 \in \mathcal{Z} \Rightarrow \bar{x}_0 \in \tilde{x}(k) \oplus (-\mathcal{Z}).$$

Com efeito, \bar{x}_0 passa a ser uma variável de decisão, permitindo que a função custo decresça a todo instante de amostragem, mesmo na presença de perturbações. Desta maneira é possível garantir estabilidade entrada-estado. A prova de estabilidade para o caso sem atraso é apresentada em Mayne, Seron e Rakovic (2005) ao passo que o Lema 2 deve ser aplicado para estender a garantia de estabilidade robusta aos sistemas com atraso, controlados com o preditor ótimo. É importante ressaltar que tanto a estratégia MPC, quanto o controlador linear asseguram satisfação robusta de restrições uma vez que há garantias que $\tilde{x}(k) \in \mathbb{X} \ominus \mathbb{E}$. Na seqüência são apresentados resultados de simulação para ilustrar o comportamento das técnicas propostas.

4.4.2.1 Caso duplo integrador

O sistema duplo integrador é bastante utilizado na literatura devido à dificuldade para controlar este tipo de sistema na presença de restrições. O modelo que será utilizado é similar ao apresentado em (MAYNE et al., 2006), porém considera-se a inserção do atraso como segue:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} u(k-d) + w(k) \\ y(k) &= [1 \ 1]x(k) + v(k) \end{aligned}$$

com $w(k) \in \mathcal{W} \triangleq \{w : \|w\|_\infty \leq 0.1\}$, $v(k) \in \mathcal{V} \triangleq \{v : |v| \leq 0.05\}$ e o atraso definido para $d = 2$ ou $d = 3$ de maneira a ilustrar as dificuldades associadas a seu efeito. As restrições nos estado são dadas por

$$x(k) \in \mathbb{X} \triangleq \{x : x = [x_1 \ x_2]', \ -40 \leq x_1 \leq 5, \ -40 \leq x_2 \leq 5\}$$

e as do controle são definidas por

$$u \in \mathbb{U} \triangleq \{u : u \leq |5|\}.$$

No caso da estratégia linear, utiliza-se o parâmetro $\lambda = 1$. Para a estratégia MPC, utiliza-se o custo de etapa $\ell(\bar{x}_i, \bar{u}_i) = 0.5(\bar{x}_i' Q_x \bar{x}_i + \bar{u}_i' Q_u \bar{u}_i)$, e o custo terminal $V_f(\bar{x}_N) = 0.5 \bar{x}_N' P \bar{x}_N$ com $Q_x = I$, $Q_u = 0.01$. Os elementos estabilizantes K_f e P , são obtidos através da solução do problema de controle ótimo de horizonte infinito sem restrições, para o modelo em questão, com as mesmas ponderações do problema com restrições. Finalmente são definidas as matrizes de ganho $K = [1 \ 1]$ e $L = [-1 \ -1]'$ e o horizonte de predição $N = 20$.

As condições iniciais são $x(0) = [10 \ -2.5]$ para o controlador linear e $x(0) = [10 \ -5]$ para o controlador preditivo. Desta maneira é possível explorar o maior domínio de atração da estratégia MPC. As incertezas foram geradas de forma pseudo aleatória variando-as entre valores extremos do conjunto \mathbb{W} . A mesma semente foi utilizada em ambos os esquemas de controle considerados. Calcula-se a primeira ação de controle em $k = 2$ para assegurar que $x(0) - \hat{x}(0) \in \bar{\Delta}$. Para k entre $-d$ e 1 , o valor do sinal de controle é nulo. Os resultados para os casos linear e preditivo são apresentados respectivamente nas Figs. 37 e 38 com Λ representando um conjunto invariante robusto e admissível do estado predito ($\hat{x}(k)$). Para o MPC baseado em tubos, o conjunto Λ corresponde ao domínio de atração Ω .

É fácil notar que a satisfação robusta de restrições é garantida uma vez que o estado predito é protegido pelo pior caso do erro de predição dado pelo conjunto \mathbb{E} . Com efeito, $\hat{x}(k) \in \Lambda$ e $x(k+d) \in \Lambda \oplus \mathbb{E} \subset \mathbb{X}$ como discutido nos Lemas 1 e 2. A principal diferença para o MPC baseado em tubos é que neste, impõe-se uma restrição sobre x_0 de tal maneira que $\hat{x}(k) \in \mathbb{X} \ominus \mathbb{E}$.

Uma das vantagens da compensação explícita, se comparada à representação aumentada, decorre do fato de que o efeito do atraso pode ser avaliado a partir do tamanho dos conjuntos limitantes de incerteza. No caso da representação aumentada, as dificuldades impostas pelo atraso estão implicitamente descritas pela descrição do sistema. Por outro lado, no caso da compensação explícita, o impacto do atraso pode ser avaliado diretamente a partir dos conjuntos \mathbb{E} e $\bar{\mathbb{W}}$. Como poderia ser esperado para um sistema duplo integrador, quanto maior o atraso, maior é o efeito das incertezas e do erro de predição, o que leva à redução do domínio de atração Ω . Vale enfatizar que este resultado vale tanto para o caso linear quanto para o controlador preditivo robusto uma vez que é necessário impor restrições duras às saídas reais a despeito do efeito das incertezas. É importante ressaltar que a satisfação robusta de restrições pode ser garantida a partir de $k + d$. Portanto, se o algoritmo é iniciado em $k = 0$, a satisfação robusta de restrições entre $k = 1$ e $k = d - 1$ pode ser testada, desde que os controles passados $u(-j)$, $j = [-d, -1]$ sejam conhecidos. Deve-se observar que este fato é uma consequência do efeito do atraso que, portanto, não pode ser evitado.

Por fim, deve-se ressaltar que o esquema de compensação de atraso pode ser aplicado com outras estratégias de controle que permitam garantir estabilidade e satisfação de restrições. No caso estudado, o domínio de atração do controlador preditivo é consideravelmente maior porque são consideradas restrições poliedrais, o que justifica a utilização de estratégias de controle preditivo baseado em modelo. O esquema de predição apresentado não permite alterar o efeito das incertezas sobre as predições, o que depende apenas do modelo considerado. No próximo capítulo será estudado o efeito do preditor de Smith filtrado no contexto da compensação de atraso robusta.

4.5 CONCLUSÕES

Nesta capítulo apresentou-se um método para análise do efeito da compensação de atraso na presença de incertezas. Esta análise permite estabelecer condições com o intuito de garantir estabilidade e satisfação robusta de restrições a partir de uma representação equivalente sem atraso. Para tanto, utiliza-se uma interpretação na qual o sistema controlado é composto pelo processo com a estrutura de compensação de atraso. Como consequência, pode-se definir estratégias de controle robusto com restrições para sistemas com atraso a partir do modelo sem atraso. Posteriormente, utilizando um estimador de Luenberger, amplia-se o escopo da discussão para sistemas com estados não-mensuráveis. Um exemplo de simulação, baseado no modelo acadêmico tipo duplo integrador, é utilizado para ilustrar o efeito da compensação de atraso e a papel da estratégia de controle no contexto de sistemas com restrições e perturbações.

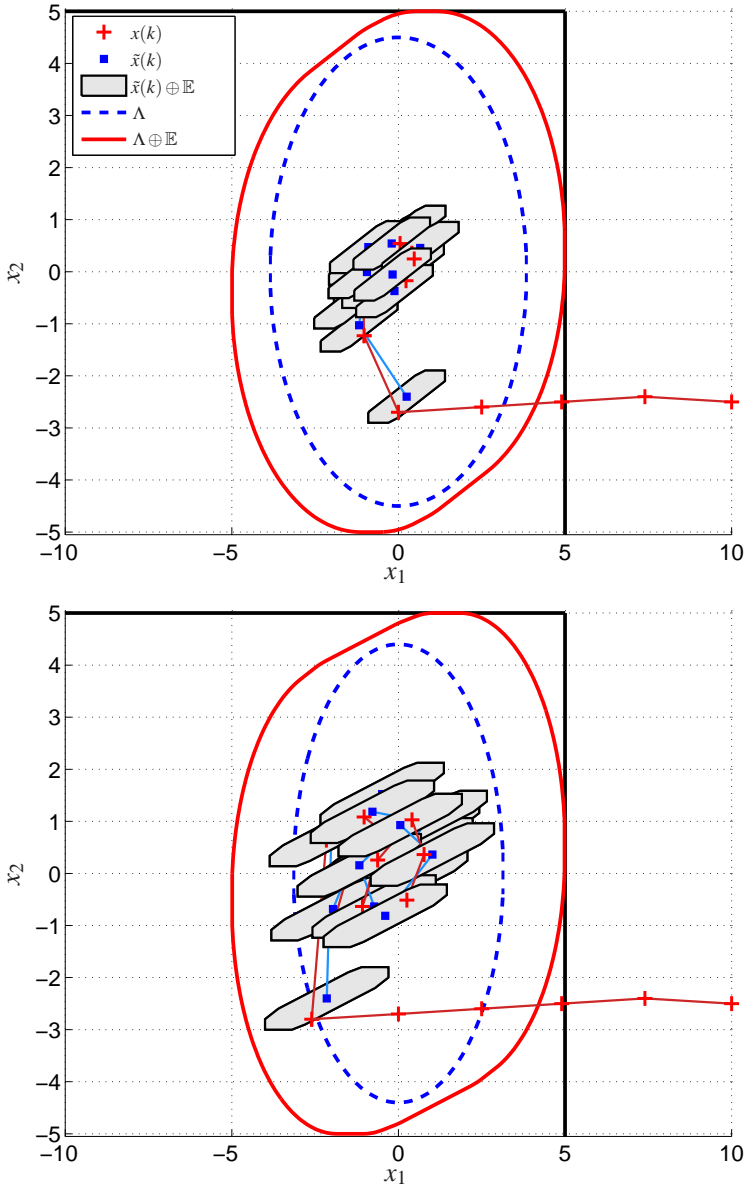


Figura 37 – Evolução dos estados com o controle linear: $d = 2$ acima e $d = 3$ abaixo.

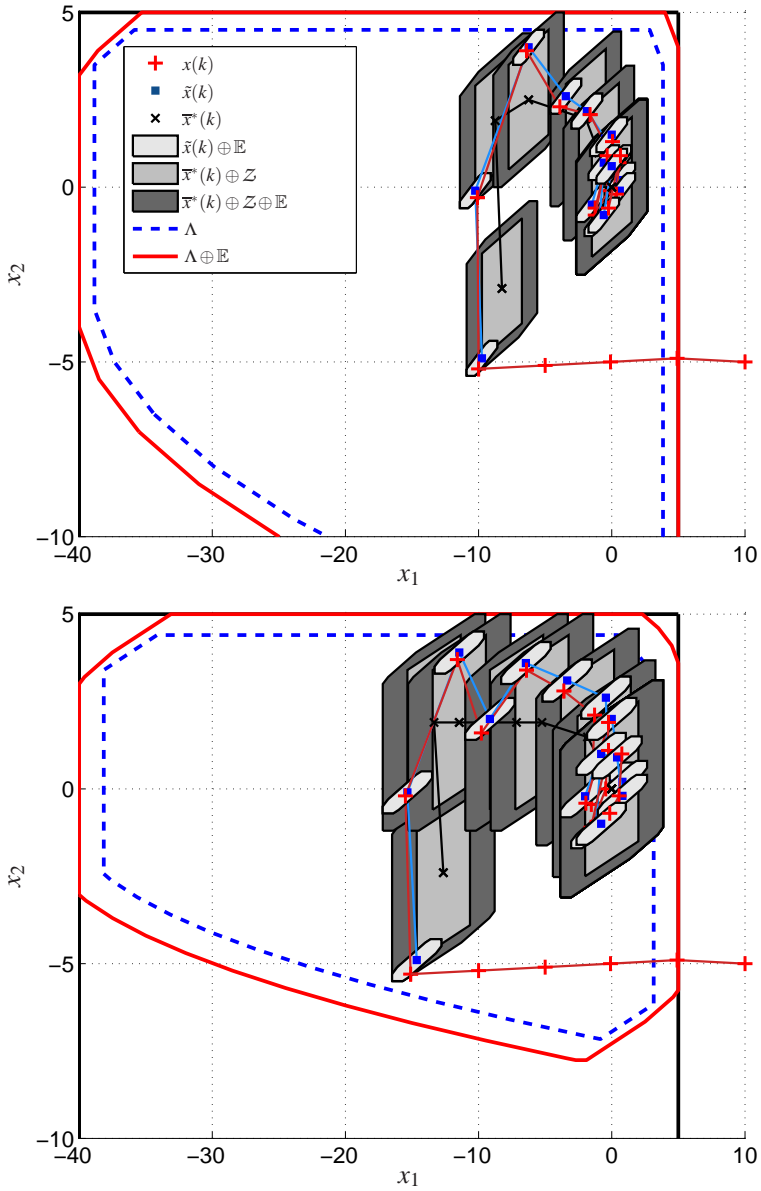


Figura 38 – Evolução dos estados com o algoritmo MPC: $d = 2$ acima e $d = 3$ abaixo.

5 COMPENSAÇÃO DE ATRASO VIA PREDITOR DE SMITH FILTRADO

Neste capítulo será estudado o efeito do preditor de Smith filtrado para sistemas com restrições na presença de incertezas. O estudo será realizado utilizando uma descrição em espaço de estados com vistas a utilizar a teoria de Lyapunov e o conceito de estabilidade entrada-estado. Será dado destaque ao efeito do filtro de robustez no contexto de estabilização na presença de incertezas. Por fim serão apresentados estudo de casos com o intuito de enriquecer a discussão a respeito da importância do preditor de Smith filtrado no contexto da robustez de controladores preditivos na presença de atrasos.

5.1 PREDITOR DE SMITH FILTRADO PARA SISTEMAS COM ESTADOS MENSURÁVEIS

Sabe-se que a estrutura do preditor de Smith baseia-se numa representação entrada-saída. No entanto, nos casos em que os estados são mensuráveis, pode-se utilizar uma saída auxiliar $y_a(k)$ que é dada, por definição, pelos próprios estados, como ilustrado a seguir

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k-d) + w(k) \\ y_a(k) &\triangleq x(k). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Desta maneira obtém-se uma relação entrada-estado (entrada-saída) dada por

$$x(k) = y_a(k) = \mathbf{G}(z^{-1})u(k-d) + \mathbf{Q}(z^{-1})w(k) \quad (5.2)$$

com

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(z^{-1}) &= (I - Az^{-1})^{-1}Bz^{-1}, \\ \mathbf{Q}(z^{-1}) &= (I - Az^{-1})^{-1}z^{-1}. \end{aligned}$$

Considerando que $w(k)$ é uma perturbação desconhecida, pode-se descrever a trajetória nominal (sem incertezas) como segue

$$\bar{x}(k+1) = A\bar{x}(k) + Bu(k-d) \quad (5.3)$$

$$\bar{y}_a(k) = \bar{x}(k) \quad (5.4)$$

ou alternativamente

$$\bar{x}(k) = \mathbf{G}(z^{-1})u(k-d). \quad (5.5)$$

Para sistemas BIBO estáveis em malha aberta, esta descrição permite utilizar a estrutura do preditor de Smith Filtrado dado por

$$\tilde{x}(k) \triangleq x(k+d|k) = \bar{x}(k+d) + \mathbf{F}_r(z^{-1})[x(k) - \bar{x}(k)]. \quad (5.6)$$

Como discutido no Capítulo 2, para sistemas que não são BIBO estáveis em malha aberta, utiliza-se a expressão a seguir

$$\tilde{x}(k) = \mathbf{S}(z^{-1})u(k) + \mathbf{F}_r(z^{-1})x(k) \quad (5.7)$$

com $\mathbf{S}(z^{-1}) = [I - z^{-d}\mathbf{F}_r(z^{-1})]\mathbf{G}(z^{-1})$ sendo uma matriz de transferência BIBO estável como explicado no Capítulo 2. Embora a Eq. (5.7) seja utilizada para implementar a estrutura de preditor de Smith filtrado nos casos de modelos que não são BIBO estáveis, a Eq. 5.6 pode ser aplicada para fins de análise em qualquer caso. Vale ressaltar que a saída auxiliar $y_a(k)$ é um artifício matemático com o objetivo de aplicar a idéia de compensação de atraso baseada no preditor de Smith em sistemas com estados mensuráveis. Os modelos expressos em termos de função de transferência podem ser convertidos para uma em espaço de estados não-mínima com estados conhecidos, como apresentado no Capítulo 3.

5.1.1 Análise do efeito de incertezas na predição

Como discutido no capítulo anterior, é importante analisar o efeito das incertezas no contexto do sistema predito (processo mais preditor) com vistas a estudar o impacto da compensação de atraso na presença de erros de modelagem, ruídos e perturbações não mensuráveis. Para tanto, o sistema equivalente pode ser descrito como segue

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1) &= A\tilde{x}(k) + Bu(k) + \tilde{w}(k) \\ y_a(k) &= x(k) = \tilde{x}(k-d) + e(k) \\ e(k) &\triangleq x(k) - \tilde{x}(k-d) = y_a(k) - \tilde{x}(k-d). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Desta maneira, pode-se obter $\tilde{w}(k)$ usando

$$\tilde{w}(k) = \tilde{x}(k+1) - A\tilde{x}(k) - Bu(k). \quad (5.9)$$

Substituindo a Eq. (5.6) na Eq. (5.9), chega-se à relação a seguir

$$\begin{aligned}\tilde{w}(k) = & \underbrace{\bar{x}(k+d+1) - \mathbf{F}_r(z^{-1})\bar{x}(k+1) + \mathbf{F}_r(z^{-1})x(k+1)}_{\tilde{x}(k+1)} \\ & - A \underbrace{[\bar{x}(k+d) - \mathbf{F}_r(z^{-1})\bar{x}(k) + \mathbf{F}_r(z^{-1})x(k)]}_{\tilde{x}(k)} - Bu(k)\end{aligned}\quad (5.10)$$

Da Eq. (5.3), sabe-se que

$$\bar{x}(k+d+1) = A\bar{x}(k+d) + Bu(k)$$

de tal maneira que a Eq. (5.10) recai na seguinte expressão

$$\begin{aligned}\tilde{w}(k) = & -\mathbf{F}_r(z^{-1})\bar{x}(k+1) + \mathbf{F}_r(z^{-1})x(k+1) + A\mathbf{F}_r(z^{-1})\bar{x}(k) - A\mathbf{F}_r(z^{-1})x(k) \\ = & \mathbf{F}_r(z^{-1})[x(k+1) - \bar{x}(k+1)] - A\mathbf{F}_r(z^{-1})[x(k) - \bar{x}(k)].\end{aligned}\quad (5.11)$$

Observa-se, a partir da Eq. (5.11), que o filtro de robustez atua sobre a diferença entre o estado medido e o estado nominal, o que indica a importância da sintonia de $\mathbf{F}_r(z^{-1})$ na presença de incertezas. Contudo, é necessário evidenciar o efeito de $w(k)$ em $\tilde{w}(k)$ uma vez que as incertezas são originalmente expressas em termos de $w(k)$. Assim, para completar a análise, pode-se substituir $x(k+1)$ e $\bar{x}(k+1)$ na Eq. (5.11), o que resulta na equação a seguir

$$\begin{aligned}\tilde{w}(k) = & \mathbf{F}_r(z^{-1})[Ax(k) + Bu(k-d) + w(k) - A\bar{x}(k) - Bu(k-d)] \\ & - A\mathbf{F}_r(z^{-1})[x(k) - \bar{x}(k)] \\ = & \mathbf{F}_r(z^{-1})w(k) + [\mathbf{F}_r(z^{-1})A - A\mathbf{F}_r(z^{-1})][x(k) - \bar{x}(k)]\end{aligned}\quad (5.12)$$

Da Eq. (5.12) pode-se observar que, na presença de perturbações constantes, se $\mathbf{F}_r(1) = I$, então $\tilde{w}(k) \rightarrow w(k)$ quando $k \rightarrow \infty$.

Por fim é importante ressaltar que $\mathbf{F}_r(z^{-1})$ é uma matriz de transferência que pode ser convenientemente escolhida. Assim, se o filtro de robustez tem uma forma diagonal com funções de transferências SISO idênticas como a seguir

$$\mathbf{F}_r(z^{-1}) = \begin{bmatrix} F_r(z^{-1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_r(z^{-1}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_r(z^{-1}) \end{bmatrix},$$

então $\mathbf{F}_r(z^{-1})A = A\mathbf{F}_r(z^{-1})$, o que reduz a Eq. (5.12) a

$$\tilde{w}(k) = \mathbf{F}_r(z^{-1})w(k). \quad (5.13)$$

Este resultado apresenta algumas implicações importantes. A primeira delas deve-se ao fato de que para sistemas estáveis em malha aberta, pode-se escolher $\mathbf{F}_r(z^{-1})$ livremente. Assim, diferentemente do preditor ótimo, a perturbação predita não depende do atraso nominal. Isto justifica o comportamento apresentado no Capítulo 1, Seção 1.1.3, uma vez para o exemplo com maior atraso nominal e incerteza, a estrutura de compensação de atraso implícita (ótima) induziu a um comportamento instável, o que não ocorrer na estrutura com preditor de Smith. Vale ressaltar que o preditor de Smith equivale a um preditor de Smith filtrado com $\mathbf{F}_r(z^{-1}) = I$ de maneira que a discussão anterior se aplica diretamente preditor de Smith. Para o caso de plantas estáveis, toda a análise anterior pode ser considerada uma vez que as mesmas relações são válidas para fins de análise. No entanto, é necessário considerar as condições de estabilidade interna discutidas no Capítulo 2. Em outras palavras, um ajuste adequado do filtro de robustez faz com que o efeito da perturbação seja afetado apenas por este filtro como indicado na Eq. (5.13).

A principal vantagem da estrutura em questão refere-se ao fato de que o efeito da perturbação predita depende de um filtro que pode ser convenientemente ajustado, ao passo que este efeito depende apenas de parâmetros do modelo do sistema no caso do preditor ótimo. Portanto, para o preditor de Smith filtrado, pode-se ajustar requisitos de malha, a exemplo de robustez e resposta à perturbações, sem afetar a resposta nominal. Já no preditor ótimo, a robustez está relacionada exclusivamente aos parâmetros de sintonia do controlador preditivo e aos parâmetros do sistema uma vez que o efeito das incertezas não pode ser atenuado por meio do filtro de robustez.

5.1.2 Análise do erro de predição

Outro elemento importante, relacionado à satisfação robusta de restrições, é o erro de predição. O desvio entre o estado efetivamente medido e o valor predito para este estado é dado por

$$e(k) = x(k) - \tilde{x}(k-d) = x(k) - \bar{x}(k) - \mathbf{F}_r(z^{-1})[x(k-d) - \bar{x}(k-d)]. \quad (5.14)$$

Como a incerteza é originalmente descrita por $w(k)$, é importante relacionar $e(k)$ a este sinal. Para tanto, a Eq. (5.14) pode ser reescrita como segue

$$e(k) = [I - z^{-d}\mathbf{F}_r(z^{-1})][x(k) - \bar{x}(k)].$$

Assim, substituindo $x(k)$ e $\bar{x}(k)$ pelas expressões apresentadas nas Eqs. (5.2) e (5.5), chega-se à equação a seguir

$$e(k) = [I - z^{-d}\mathbf{F}_r(z^{-1})]\mathbf{Q}(z^{-1})w(k). \quad (5.15)$$

Considerando os limites de $w(k)$ na forma de $\|w(k)\|_\infty < \gamma_w$, pode-se obter o conjunto \mathbb{E} na forma $\|e(k)\|_\infty < \gamma_e$, a partir da norma ℓ_1 dos elementos de $[I - z^{-d}\mathbf{F}_r(z^{-1})]\mathbf{Q}(z^{-1})$ como explicitado em Skogestad e Postlethwaite (2005, Apêndice A). Esta abordagem apresenta um grau de conservadorismo associado à determinação do pior caso do erro, mas permite definir limites para o erro de predição \mathbb{E} no caso com o preditor de Smith filtrado. De maneira semelhante, pode-se definir o conjunto limitante das incertezas preditas $\tilde{\mathbb{W}}$, utilizando a mesma idéia para a Eq. (5.13).

5.1.3 Comparação entre o preditor ótimo e o preditor de Smith filtrado

Uma vez que $\mathbf{F}_r(z^{-1})$ é uma matriz de transferência convenientemente escolhida, nada impede que essa matriz seja definida por um ganho constante. Deve-se notar que para $\mathbf{F}_r(z^{-1}) = A^d$, então a Eq. (5.12) torna-se $\tilde{w}(k) = A^d w(k)$, que é o mesmo resultado obtido com o preditor ótimo. Isto indica que o preditor de Smith filtrado recai no preditor ótimo neste caso particular. Para demonstrar esta propriedade, considere a Eq. (5.6) com o filtro $\mathbf{F}_r(z^{-1}) = A^d$, o que resulta na seguinte equação

$$\tilde{x}(k) = \bar{x}(k+d) + A^d[x(k) - \bar{x}(k)]. \quad (5.16)$$

Assim, somando e subtraindo o termo $\sum_{j=1}^d [A^{j-1}Bu(k-d-j)]$ em ambos os lados da Eq. (5.16), obtém-se

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k) &= \bar{x}(k+d) + A^d x(k) + \sum_{j=1}^d [A^{j-1}Bu(k-d-j)] \\ &\quad - \underbrace{\left\{ \bar{x}(k) + \sum_{j=1}^d [A^{j-1}Bu(k-d-j)] \right\}}_{\bar{x}(k+d)} \\ &= A^d x(k) + \sum_{j=1}^d [A^{j-1}Bu(k-d-j)] \end{aligned} \quad (5.17)$$

que é a expressão do preditor ótimo como esperado. Deve-se notar que desta maneira não se garante rejeição de perturbação constante uma vez $\mathbf{F}_r(z^{-1}) =$

$A^d \neq I$. No entanto, é possível eliminar o efeito da perturbação através de uma compensação externa que será discutida mais a frente. Portanto, a estrutura do preditor de Smith filtrado pode ser utilizada para implementar o preditor ótimo para sistemas BIBO estáveis em malha aberta. Mais do que isso, este resultado permite estudar o impacto de filtro de robustez no contexto do erro de predição. Para analisar o efeito do preditor com relação ao erro de predição, observa-se que o estado real e seu valor nominal serão descritos em termos de $x(k-d)$ e $\bar{x}(k-d)$ respectivamente como segue

$$x(k) = A^d x(k-d) + \sum_{j=1}^d [A^{j-1} B u(k-j-d)] + \sum_{j=1}^d [A^{j-1} w(k-j)], \quad (5.18)$$

$$\bar{x}(k) = A^d \bar{x}(k-d) + \sum_{j=1}^d [A^{j-1} B u(k-j-d)]. \quad (5.19)$$

Como considerado anteriormente, o erro de predição é dado por

$$e(k) = x(k) - \tilde{x}(k-d) = x(k) - \bar{x}(k) - \mathbf{F}_r(z^{-1})[x(k-d) - \bar{x}(k-d)]. \quad (5.20)$$

Assim, substituindo as Eqs. (5.18) e (5.19) na Eq. (5.20), obtém-se a seguinte expressão para o erro de predição

$$e(k) = A^d [x(k-d) - \bar{x}(k-d)] + \sum_{j=1}^d [A^{j-1} w(k-j)] - \mathbf{F}_r(z^{-1})[x(k-d) - \bar{x}(k-d)] \quad (5.21)$$

$$= w(k-1) + A w(k-2) + \dots + A^{d-1} w(k-d) + (A^d - \mathbf{F}_r(z^{-1}))[x(k-d) - \bar{x}(k-d)]. \quad (5.22)$$

Como esperado, o erro de predição do preditor de Smith filtrado é idêntico ao do preditor ótimo ao considerar-se $\mathbf{F}_r(z^{-1}) = A^d$. No entanto, pode-se perceber que se $\mathbf{F}_r(z^{-1}) \neq A^d$, então existe uma parcela adicional referente à diferença entre $x(k-d)$ e $\bar{x}(k-d)$. Em outras palavras, como a incerteza não é conhecida, se a resposta em frequência do filtro $\mathbf{F}_r(z^{-1})$ aproxima-se da matriz constante A^d , então há uma tendência de redução no erro de predição uma vez que reduz-se a magnitude do pior caso. Deve-se notar que para $\mathbf{F}_r(z^{-1}) = A^d$, o pior caso é dado por $\mathbb{E} = \mathbb{W} \oplus A\mathbb{W} \dots \oplus A^{d-1}\mathbb{W}$, o que deixa de ser válido para $\mathbf{F}_r(z^{-1}) \neq A^d$ devido ao erro adicional.

Já foi discutido que, em sistemas com compensação de atraso, o efeito da perturbação na malha de controle é dado por $\tilde{w}(k)$, o que afeta aspectos como a estabilidade robusta. Por outro lado, o erro de predição ($e(k)$) pode

causar violação de restrições por partes dos estados, uma vez que os algoritmos de controle preditivo impõe restrições aos estados em função de um modelo que difere do sistema real. O filtro de robustez é capaz de reduzir o impacto de $w(k)$ em $\tilde{w}(k)$ pois se permite aumentar a atenção dada à saída do modelo em detrimento da informação da saída real, minimizando o impacto das incertezas na malha. Por outro lado, como dito anteriormente, a escolha do filtro na forma do preditor ótimo ($\mathbf{F}_r(z^{-1}) = A^d$), minimiza o pior caso do erro de predição por eliminar a parcela referente a $x(k-d) - \bar{x}(k-d)$. No entanto, esta escolha pode apresentar um impacto negativo no que diz respeito ao efeito de $w(k)$ em $\tilde{w}(k)$. Portanto, a sintonia do filtro de robustez impõe um compromisso entre erro de predição e efeito das incertezas do sistema equivalente (predito). Deve-se destacar que a grande vantagem do preditor de Smith filtrado, em comparação ao preditor ótimo, está na possibilidade de lidar com o comportamento de robusto (efeito das incertezas) sem alterar o desempenho nominal.

5.2 PREDITOR DE SMITH FILTRADO COM REPRESENTAÇÃO NÃO-MÍNIMA

A suposição de que todos os estados são mensuráveis possibilita a comparação direta entre o esquema de predição proposto em Rao, Wright e Rawlings (1998) e o preditor de Smith filtrado. Por outro lado, a representação não-mínima permite considerar valores distintos de atrasos efetivos por saída de forma direta. Além disso, este tipo de representação é mais realista do ponto de vista prático dado que modelos do tipo entrada-saída podem ser identificados por meio de técnicas relativamente simples. O efeito do preditor de Smith filtrado na presença de incertezas pode ser avaliado a partir de uma representação não-mínima, similar à indicada no Capítulo 4, dada por

$$\begin{aligned} y(k+D+1) = & -A_1y(k+D) - A_2y(k-1+D) - \dots - A_{na-1}y(k-na+1+D) \\ & + B_1u(k) + B_2u(k-1) + \dots + B_{nb}u(k-nb+1) + \varepsilon(k) \end{aligned} \quad (5.23)$$

onde $\varepsilon(k)$ é uma variável utilizada para corrigir desvios entre a predição de um passo, obtida com o modelo auto-regressivo com entrada exógena (ARX), e a saída real.

É importante enfatizar que $y(k+D)$ é dado por

$$y(k+D) \triangleq \begin{bmatrix} y_1(k+d_1) \\ y_2(k+d_2) \\ \vdots \\ y_p(k+d_p) \end{bmatrix}$$

de maneira que os d_i atrasos efetivos por saída podem assumir valores distintos. Note que o valor de $y(k+D)$ só pode ser determinado em $k+\bar{d}$ sendo \bar{d} o maior dos atrasos efetivos. Por outro lado, a saída do sistema predito $y(k+D|k)$ é obtido no instante k através da estrutura do preditor de Smith filtrado apresentada no Capítulo 3.

A dinâmica do sistema predito (planta e preditor de Smith filtrado) pode ser representada em k por

$$\begin{aligned} y(k+1+D|k+1) = & -A_1y(k+D|k) - A_2y(k-1+D|k) - \dots \\ & - A_{na-1}y(k-na+1+D|k) + B_1u(k) + B_2u(k-1) + \dots \\ & + B_{nb}u(k-nb+1) + \tilde{\epsilon}(k) \end{aligned} \quad (5.24)$$

sendo $\tilde{\epsilon}(k)$ uma variável que corrige a diferença entre a saída do preditor de Smith filtrado obtida em $k+1$ ($y(k+1+D|k+1)$) e o valor esperado a partir do modelo ARX dadas as informações no instante k . Note que a predição de um passo para o sistema predito é dada por

$$\begin{aligned} y(k+1+D|k) = & -A_1y(k+D|k) - A_2y(k-1+D|k) \dots \\ & - A_{na-1}y(k-na+1+D|k) + B_1u(k) + B_2u(k-1) + \dots \\ & + B_{nb}u(k-nb+1). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Para simplificar a notação e a apresentação dos resultados, a saída do preditor de Smith filtrado, obtida num instante j , será representada por

$$\tilde{y}(j) \triangleq y(j+D|j).$$

Assim, a Eq. (5.24) pode ser reescrita como a seguir

$$\begin{aligned} \tilde{y}(k+1) = & -A_1\tilde{y}(k) - A_2\tilde{y}(k-1) \dots - A_{na-1}\tilde{y}(k-na+1) \\ & + B_1u(k) + B_2u(k-1) + \dots + B_{nb}u(k-nb+1) + \tilde{\epsilon}(k). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Considerando a representação não-mínima na presença de incertezas,

observa-se que os estado são dados por

$$x(k) = [\tilde{y}(k)' \tilde{y}(k-1)' \dots \tilde{y}(k-na+1)' u(k-1)' u(k-2)' \dots u(k-nb+1)']'$$

com o sistema predito em espaço de estados descrito por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_{yu}x(k) + B_{yu}u(k) + w_{yu}(k) \\ \tilde{y}(k) &= C_{yu}x(k) \end{aligned}$$

sendo $w_{yu}(k)$ a perturbação aditiva. Seguindo o argumento utilizado no Capítulo 4, pode-se demonstrar que

$$w_{yu}(k) = \begin{bmatrix} y(k+1+D|k+1) - y(k+1+D|k) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\epsilon}(k) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, a evolução nominal (sem efeito das incertezas) é representada por

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= A_{yu}\bar{x}(k) + B_{yu}u(k) \\ \bar{y}(k+D|k) &= C_{yu}\bar{x}(k). \end{aligned}$$

com

$$\bar{y}(k+D) \triangleq \bar{y}(k+D|k) = \bar{y}(k+D|k-j), \quad 0 \leq j \leq k$$

uma vez que a evolução nominal depende apenas da seqüência de controle e das condições iniciais. De maneira similar, pode-se definir a saída nominal **atual** como sendo

$$\bar{y}(k) = [\bar{y}_1(k) \ \bar{y}_2(k) \ \dots \ \bar{y}_p(k)]'.$$

Estes elementos foram definidos com vistas a reescrever a saída do sistema predito, obtida através do preditor de Smith filtrado, em função da perturbação original ($\epsilon(k)$).

A saída do sistema predito pode ser reescrita como segue

$$\tilde{y}(k) = y(k+D|k) = \bar{y}(k+D) + \mathbf{F}_r(z^{-1})[y(k) - \bar{y}(k)] \quad (5.27)$$

de maneira que a incerteza $\tilde{\epsilon}(k)$ pode ser determinada por

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}(k) = \tilde{y}(k+1) - y(k+1+D|k) = & \underbrace{\bar{y}(k+1+D) + \mathbf{F}_r(z^{-1})[y(k+1) - \bar{y}(k+1)]}_{\tilde{y}(k+1)} \\ & - \underbrace{[-A_1\tilde{y}(k) - \dots - A_{na-1}\tilde{y}(k-na+1) + B_1u(k) + \dots + B_{nb}u(k-nb+1)]}_{y(k+D+1|k)}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Tendo em conta que, para o caso nominal, verifica-se a seguinte relação

$$\begin{aligned} \bar{y}(k+1+D) = & -A_1\bar{y}(k+D) - A_2\bar{y}(k-1+D) \dots - A_{na-1}\bar{y}(k+na+1+D) \\ & + B_1u(k) + B_2u(k-1) + \dots + B_{nb}u(k-nb+1), \end{aligned}$$

e que

$$\tilde{y}(k-j) = \bar{y}(k-j+D) + \mathbf{F}_r(z^{-1})[y(k-j) - \bar{y}(k-j)], \quad j \geq 0.$$

pode-se reduzir a Eq. (5.28) à expressão

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}(k) = & \mathbf{F}_r(z^{-1})[y(k+1) - \bar{y}(k+1)] + A_1\mathbf{F}_r(z^{-1})[y(k) - \bar{y}(k)] \\ & + \dots + A_{na-1}\mathbf{F}_r(z^{-1})[y(k-na+1) - \bar{y}(k-na+1)]. \end{aligned} \quad (5.29)$$

A Eq. (5.29) assemelha-se à Eq. (5.11) para o caso com estados mensuráveis. Neste resultado verifica-se que o filtro de robustez atua na diferença entre as saídas reais e a saída nominal, cumprindo um papel importante na presença de incertezas. No entanto deseja-se mostrar que, sob determinadas condições, $\tilde{\epsilon}(k)$ não é afetado pelo tamanho nominal dos atrasos efetivos assim como no caso com estados mensuráveis.

Para obter uma expressão similar ao caso com estados mensuráveis, é necessário assumir determinadas condições para o modelo ARX e para o filtro de robustez. Dado um modelo de Matriz de Transferência do processo, este pode ser expresso por uma descrição LMFD na forma

$$y(k) = \mathbf{A}(z^{-1})^{-1} \mathbf{B}(z^{-1})u(k)$$

com $\mathbf{A}(z^{-1})$ sendo uma matriz de transferência diagonal como segue

$$\mathbf{A}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} A_1(z^{-1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2(z^{-1}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_q(z^{-1}) \end{bmatrix}.$$

Esta propriedade pode ser assegurada, sem perda de generalidade, uma vez

que pode-se realizar uma reformulação conveniente da matriz de transferência como discutido em Normey-Rico e Camacho (2007). Desta maneira assegura-se que as matrizes A_i também apresentam elementos não nulos apenas na diagonal principal. Com relação à matriz de atrasos ($\mathbf{D}_s(z^{-1})$), apresentada no Capítulo 3, esta possui uma forma diagonal por definição. Por fim, o filtro de robustez pode ser convenientemente escolhido na forma de uma matriz de transferência diagonal como indicado a seguir

$$\mathbf{F}_r(z^{-1}) = \begin{bmatrix} F_{r1}(z^{-1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_{r2}(z^{-1}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_{rq}(z^{-1}) \end{bmatrix}.$$

Estas condições são importantes para assegurar a seguinte propriedade

$$\mathbf{F}_r(z^{-1})\mathbf{D}_s(z^{-1})A_i = A_i\mathbf{F}_r(z^{-1})\mathbf{D}_s(z^{-1}), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5.30)$$

uma vez que todas as matrizes são diagonais. Com efeito, a Eq. (5.29) pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}(k) = & \mathbf{F}_r(z^{-1})\mathbf{D}_s(z^{-1})[y(k+1+D) - \bar{y}(k+1+D)] + A_1\mathbf{F}_r(z^{-1})[y(k) - \bar{y}(k)] \\ & + \dots + A_{na-1}\mathbf{F}_r(z^{-1})[y(k-na+1) - \bar{y}(k-na+1)]. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Subtraindo a Eq. (5.23) da Eq. (5.25), verifica-se que

$$\begin{aligned} y(k+1+D) - \bar{y}(k+1+D) = & -A_1[y(k+D) - \bar{y}(k+D)] - A_2[y(k-1+D) \\ & - \bar{y}(k-1+D)] - \dots - A_{na-1}[y(k-na+1+D) \\ & - \bar{y}(k-na+1+D)] + \varepsilon(k) \end{aligned} \quad (5.32)$$

Assim, substituindo a Eq. (5.32) na Eq. (5.31) e utilizando a propriedade da Eq. (5.30), obtém-se a relação a seguir

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}(k) = & -A_1\mathbf{F}_r(z^{-1})[y(k) - \bar{y}(k)] - \dots - A_{na-1}\mathbf{F}_r(z^{-1})[y(k-na+1) \\ & - \bar{y}(k-na+1)] + \mathbf{F}_r(z^{-1})\mathbf{D}_s(z^{-1})\varepsilon(k) + A_1\mathbf{F}_r(z^{-1})[y(k) - \bar{y}(k)] + \dots \\ & + A_{na-1}\mathbf{F}_r(z^{-1})[y(k-na+1) - \bar{y}(k-na+1)] \end{aligned}$$

Por fim, chega-se à expressão que relaciona $\tilde{\epsilon}(k)$ a $\epsilon(k)$

$$\tilde{\epsilon}(k) = \mathbf{F}_r(z^{-1}) \begin{bmatrix} \epsilon_1(k-d_1) \\ \epsilon_2(k-d_2) \\ \vdots \\ \epsilon_p(k-d_p) \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{F}_r(z^{-1})\epsilon(k-D).$$

Este resultado é análogo ao caso com estados mensuráveis, no entanto existem alguns detalhes que os diferenciam. A diferença principal está no fato que, devido a representação convenientemente escolhida com $\mathbf{A}(z^{-1})$ numa forma diagonal, pode-se sintonizar cada um dos filtros SISO ($F_{ri}(z^{-1})$) de maneira independente. Isto permite que a sintonia seja realizada com relação ao erro de predição por saída, o que confere maior liberdade no que diz respeito ao projeto. Deve-se notar que $\epsilon(k)$ pode ser obtido em $k + \bar{d} + 1$ por meio da Eq. (5.23) sendo \bar{d} o maior dos atrasos d_i . De maneira análoga, $\epsilon(k-D)$ pode ser obtido em $k+1$. Assim, o papel do filtro de robustez é semelhante ao caso com estados mensuráveis e deve ser utilizado para atenuar o efeito das incertezas que se manifestam via $\epsilon(k)$.

5.2.1 Análise do erro de predição

A análise do erro de predição é similar ao caso com estados mensuráveis. Para tanto, seja $\tilde{y}(k)$ dado pela Eq. (5.27), define-se

$$e(k+D) \triangleq y(k+D) - \tilde{y}(k) = y(k+D) - \bar{y}(k+D) - \mathbf{F}_r(z^{-1})[y(k) - \bar{y}(k)]. \quad (5.33)$$

Assim Eq. (5.33) pode ser reescrita como segue

$$e(k+D) = [I - \mathbf{F}_r(z^{-1})\mathbf{D}_s(z^{-1})][y(k+D) - \bar{y}(k+D)].$$

Da Eq. (5.32), pode-se observar que $y(k+D) - \bar{y}(k+D)$ é dado por

$$\begin{aligned} y(k+D) - \bar{y}(k+D) &= [I + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + \dots + A_{na-1} z^{-na+1}]^{-1} \epsilon(k) \\ &= \mathbf{Q}(z^{-1}) \epsilon(k) \end{aligned}$$

com

$$\mathbf{Q}(z^{-1}) = [I + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + \dots + A_{na-1} z^{-na+1}]^{-1}.$$

Assim chega-se a

$$e(k+D) = [I - \mathbf{F}_r(z^{-1})\mathbf{D}_s(z^{-1})]\mathbf{Q}(z^{-1})\epsilon(k). \quad (5.34)$$

Considerando a propriedade (5.30) e multiplicando ambos os lados da Eq. (5.34) à esquerda por $\mathbf{D}_s(z^{-1})$, verifica-se que a Eq. (5.34) recai em

$$e(k) \triangleq [\mathbf{I} - \mathbf{F}_r(z^{-1})\mathbf{D}_s(z^{-1})]\mathbf{Q}(z^{-1})\boldsymbol{\varepsilon}(k - D).$$

com

$$\boldsymbol{\varepsilon}(k - D) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1(k - d_1) \\ \varepsilon_2(k - d_2) \\ \vdots \\ \varepsilon_p(k - d_p) \end{bmatrix}.$$

Uma vez mais verifica-se a analogia entre este resultado e o esquema do Capítulo 4. Porém, este esquema é mais abrangente por possibilitar a compensação de atrasos efetivos por saída distintos.

5.3 ESTUDO DE CASOS

Nesta seção serão apresentados três casos com o intuito de evidenciar o papel da compensação de atraso baseada no preditor de Smith filtrado com relação ao ajuste de requisitos de malha em controladores preditivos. O primeiro caso refere-se a um exemplo acadêmico baseado no modelo de uma coluna de destilação conhecido como “Wood-Berry” (WOOD; BERRY, 1973 apud NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007), o segundo baseia-se num modelo bilinear de primeira ordem de uma planta solar da *Plataforma Solar de Almería* - Espanha (ROCA et al., 2009), o qual está inserido no contexto de um projeto de cooperação Brasil - Espanha e o terceiro consiste em um teste experimental realizado num sistema de aquecimento usado em laboratório para ensino de controle de processos.

Com relação à coluna de destilação, este caso é utilizado para ilustrar o comportamento robusto de controladores preditivos que utilizam a estrutura de compensação de atraso implícita (inerente) como o GPC (CAMACHO; BORDONS, 2004) e sua versão modificada, a qual baseia-se no preditor de Smith filtrado, SPGPC (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007). O problema da plataforma solar é discutido com vistas a mostrar que os resultados deste capítulo podem ser estendidos para outras estratégias. Desta maneira é possível facilitar a compreensão e o procedimento de sintonia em outros sistemas de controle com atraso reais. Por fim, o caso experimental foi concebido para destacar a importância do filtro de robustez na presença de aspectos práticos a exemplo de ruídos e erros de modelagem, bem como apresentar um exemplo em que se assegura estabilidade e satisfação robusta de restrições.

5.3.1 Coluna tipo “Wood-Bery”

Caso 1 Sistemas com múltiplos atrasos.

Sabe-se que os controladores preditivos sem garantia de estabilidade apresentam características estabilizantes quando utilizados em plantas estáveis com horizonte de predição suficientemente longos (MAYNE et al., 2000). Também é conhecido o fato de que os controladores preditivos lineares apresentam alguma margem de robustez (LIMON et al., 2010). Em outras palavras, sabe-se que os controladores preditivos para sistemas lineares toleram algum nível de perturbação caso a função custo se comporte como uma função de Lyapunov, mesmo que este comportamento não tenha sido imposto através de técnicas estabilizantes. Como consequência, o filtro de robustez tem um papel importante mesmo nos casos sem garantia de estabilidade uma vez que ele pode ser ajustado para forçar que o efeito das perturbações permaneça em níveis aceitáveis. Este resultado já era conhecido para o GPC sem restrições (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007) uma vez que o controlador preditivo recai num lei de controle linear o que permite utilizar técnicas clássicas de análise de robustez. Já para o caso com restrições, a discussão torna-se mais complexa devido a presença de restrições ativas, tornando necessário utilizar ferramentas adequadas à problemas não-lineares a exemplo da teoria de estabilidade entrada-estado.

Para ilustrar o papel do filtro de robustez, considere o modelo linear da coluna de destilação dado por

$$y(s) = \left[\begin{array}{cc} \frac{12.8}{1+16.7s}e^{-s} & \frac{-18.9}{1+21s}e^{-3s} \\ \frac{6.6}{1+10.9s}e^{-7s} & \frac{-19.4}{1+14.4s}e^{-3s} \end{array} \right] u(s) + \left[\begin{array}{c} \frac{3.8}{1+14.9s}e^{-8.1s} \\ \frac{4.8}{1+13.2s}e^{-3.4s} \end{array} \right] q(s) \quad (5.35)$$

com $u_1(s)$ e $u_2(s)$ sendo a vazão de refluxo e a vazão do vapor do *reboiler* respectivamente, $y_1(s)$ e $y_2(s)$ são as composições do produto no topo e no fundo em termo de fração molar de metanol e $q(s)$ é uma perturbação da vazão de alimentação que será considerada do tipo não mensurável. Para este modelo utiliza-se um período de amostragem $T_s = 1\text{min}$. Uma vez que o modelo é dado na forma de matriz de transferência, faz-se necessário a utilização de uma representação de estados não-mínima. Removendo os atrasos efetivos por saída, observa-se que é possível obter uma descrição do tipo LMFD na forma desejada como segue

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{A}(s)^{-1}\mathbf{B}(s)$$

com

$$\mathbf{A}(s) = \begin{bmatrix} (1 + 16.7s)(1 + 21s) & 0 \\ 0 & (1 + 14.4s)(1 + 10.9s) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}(s) = \begin{bmatrix} 12.8(1 + 21s) & -18.9(1 + 16.7s)e^{-2s} \\ 6.6(1 + 14.4s)e^{-4s} & -19.4(1 + 10.9s) \end{bmatrix}.$$

Uma representação LMFD similar pode ser obtida em tempo discreto através do mesmo procedimento de reorganização da matriz de transferência. Deve-se notar que $\mathbf{A}(s)$ apresenta uma forma diagonal como desejado.

As simulações serão realizadas utilizando um GPC multivariável comum (CAMACHO; BORDONS, 2004) e um SPGPC (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007) o qual realiza a compensação de atraso por meio do preditor de Smith filtrado. A função custo é dada para o GPC por

$$J = \sum_{j=1}^N ||y(k + D + j|k) - y_r(k + j)|| + \sum_{j=1}^N ||\Delta u(k + j - 1)||_{Q_u}$$

e para o SPGPC por

$$J = \sum_{j=1}^N ||\tilde{y}(k + j) - y_r(k + D + j)|| + \sum_{j=1}^N ||\Delta u(k + j - 1)||_{Q_u}.$$

sendo $Q_u = 0.1 \text{diag}(12.8^2, 19.4^2)$ e $N = 15$ em ambos os casos ¹. São consideradas restrições dadas por $0 < y_i < 0.9$, $-0.15 < u_i < 0.15$ e $-0.1 < \Delta u < 0.1$. O filtro de robustez é dado por

$$\mathbf{F}_r(z^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{0.49537z(z^2 - 1.763z + 0.7794)}{(z - 0.8)^3} & 0 \\ 0 & \frac{0.53407z(z^2 - 1.767z + 0.7816)}{(z - 0.8)^3} \end{bmatrix}$$

com os seus zeros sendo sintonizados para eliminar os pólos de malha aberta da resposta à perturbação.

No cenário de simulação escolhido, iniciam-se os testes levando a saída do repouso a uma condição estacionária com $(y_1, y_2) = (0.8, 0.4)$. Posteriormente, modifica-se a referência da saída 2 para 0.6 e por fim, aplica-se uma perturbação $q(s) = -0.1$ em 150 min. Na Fig. 39 apresenta-se o comportamento dos controladores com compensação de atraso robusta e com incorporação do atraso ao modelo de predição para o caso sem erro de modela-

¹A ponderação da ação de controle foi normalizada em função dos ganhos da diagonal principal para equalizar o peso das saídas com relação ao custo J .

gem. Pode-se notar que a resposta com o filtro de robustez é menos agressiva e menos oscilatória do que a obtida com o GPC convencional. No entanto, o tempo de acomodação em ambos os casos é próximo devido à eliminação dos pólos de malha aberta da resposta à perturbação. Este é uma possibilidade interessante da estrutura baseada no preditor de Smith filtrado visto que a rejeição de perturbação é um requisito importante em grande parte dos sistemas de controle reais.

Na sequência, considerou-se um erro de estimação no atraso de 10% para os elementos da diagonal principal, o que é apresentado na Fig. 40. Este erro relativamente pequeno causou uma deterioração importante na resposta do sistema sem compensador de atraso robusto. Como indicado pela Eq. (4.13), a incorporação do atraso à dinâmica do modelo de predição tende a propagar o efeito da incerteza durante o período do efeito do atraso. Por outro lado, a resposta do sistema com compensador robusto foi pouca afetada pelo erro de estimação do atraso devido à capacidade do filtro de robustez de atenuar o efeito das incertezas. Este resultado enfatiza a utilidade do filtro de robustez uma vez que é possível melhorar a robustez sem afetar de maneira significativa a rejeição de perturbação, ratificando a importância da discussões do Capítulo 2. É importante salientar que no caso do GPC, seria necessário alterar a ponderação do esforço de controle e o horizonte de predição, o que afetaria o desempenho nominal. Portanto, a discussão teórica a respeito do filtro de robustez e do preditor ótimo é útil para entender os resultados observados por meio de simulação. Mais do que isso, estes resultados ajudam no procedimento de sintonia do filtro de robustez uma vez se entende a maneira pela qual este filtro afeta a estratégia MPC com restrições e atraso.

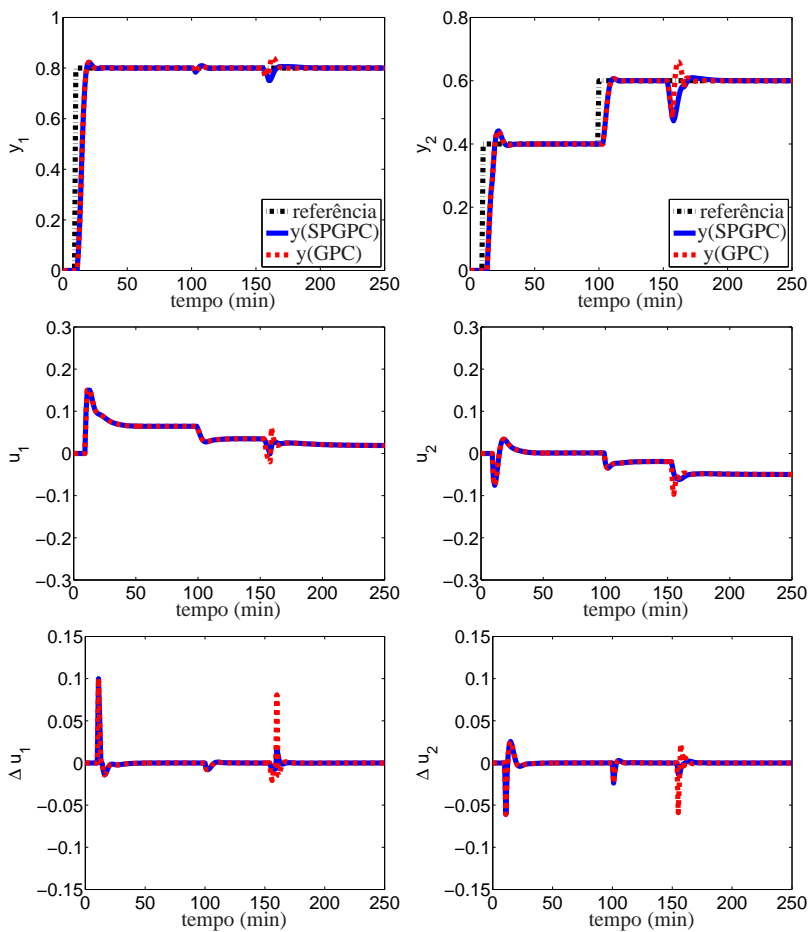


Figura 39 – Resposta, sinal de controle e incremento de controle obtidos a partir da coluna de destilação tipo Wood-Berry com o modelo nominal

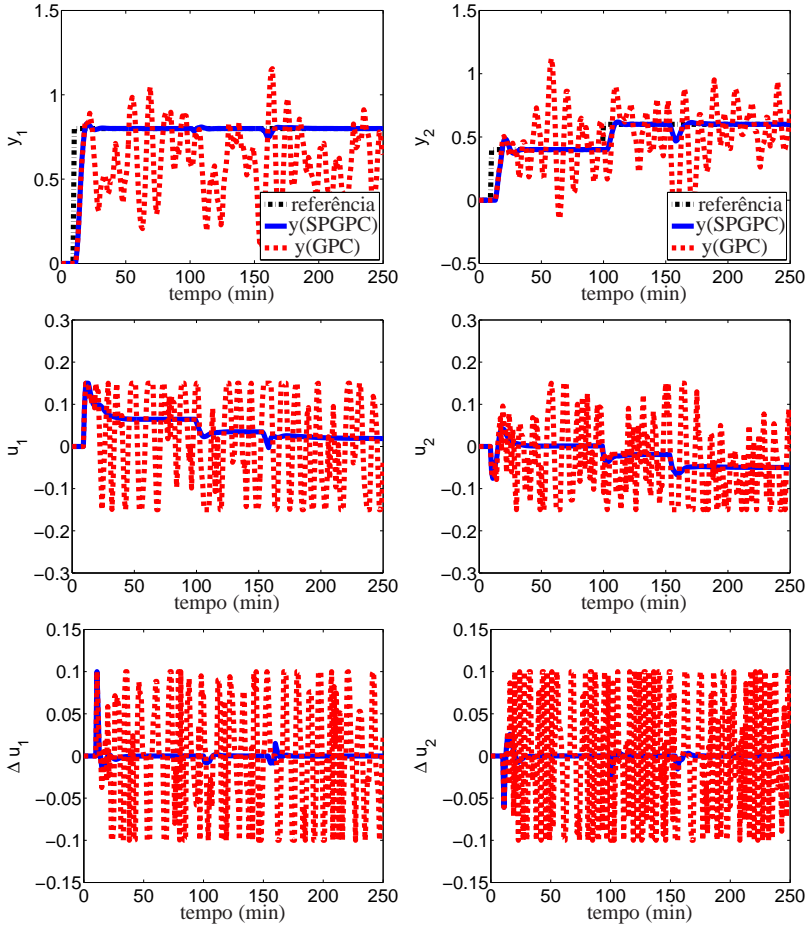


Figura 40 – Resposta, sinal de controle e incremento de controle obtidos a partir da coluna de destilação tipo Wood-Berry com incerteza no modelo.

5.3.2 Plataforma solar de Almería

Caso 2 Sistema bilinear de primeira ordem.

Neste caso será proposto um algoritmo com compensação de atraso para o sistema de aquecimento solar da *Plataforma solar de Almería*. O algoritmo será chamado Controlador Preditivo Prático (CPP) devido a utilização de uma mudança de variável que mapeia o modelo bilinear numa representação linear. As principais vantagens deste algoritmo, se comparado a outros recentemente publicados, são: i) o modelo linear é BIBO estável o que simplifica a sintonia do filtro de robustez (ROCA et al., 2009) e ii) é necessário resolver apenas um problema de otimização a cada instante e o esforço computacional é equivalente ao de um MPC linear (TORRICO et al., 2010).

5.3.2.1 Modelo simplificado

Nesta seção será apresentado o modelo simplificado de um sistema de controle de coletores solares de uma planta de dessalinização. Como discutido em Roca et al. (2008), a temperatura de saída do líquido do sistema coletor, T_{oF} ($^{\circ}\text{C}$), pode ser modelada considerando a dinâmica do tubo absorvedor hipotético equivalente que representa o coletor como um todo. Este absorvedor hipotético é caracterizado pela vazão mássica equivalente, \dot{m}_{eq} , que depende da vazão de entrada, \dot{m}_F , e de algumas constantes relacionadas a seguir: número de laços operativos, n_l , número de grupos de coletores em cada laço, n_c , número de conexões em paralelo em cada um dos grupos, n_{cp} e do número de tubos absorvedores em cada coletor n_{ab} . Assim, a vazão mássica equivalente é dada por

$$\dot{m}_{eq} = \frac{\dot{m}_F}{n_l \cdot n_c \cdot n_{cp} \cdot n_{ab}}. \quad (5.36)$$

A temperatura de saída deste absorvedor equivalente varia em função da irradiação solar, I (W/m^2), da temperatura ambiente, T_a ($^{\circ}\text{C}$), da temperatura de entrada, T_{iF} ($^{\circ}\text{C}$) e do fluxo mássico equivalente, \dot{m}_{eq} (kg/s) (ROCA et al., 2009; TORRICO et al., 2010). Como descrito em (TORRICO et al., 2010), deseja-se controlar a temperatura de saída a partir da variação do fluxo mássico de entrada. Portanto, assumindo o grupo coletor destacado em cinza na Fig. 41, pode-se observar duas fontes de atraso: um atraso d_{TiF} causado pela posição do sensor de temperatura da entrada e um tempo morto d_c , verificado experimentalmente (ROCA et al., 2009; TORRICO et al., 2010), que decorre do tempo para transportar calor e energia ao longo do grupo de cole-

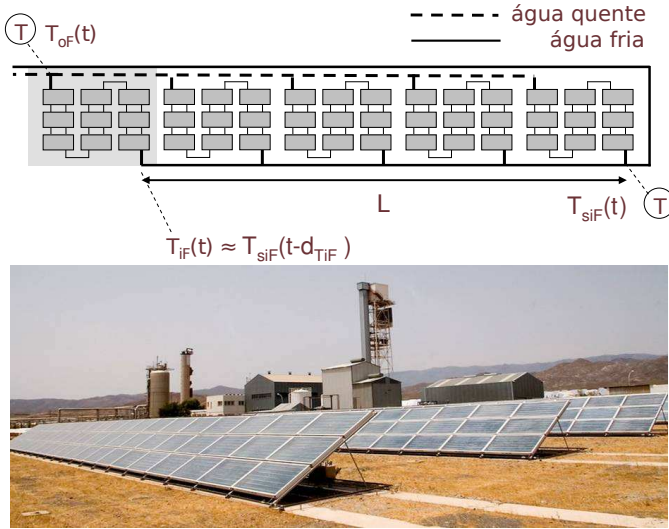


Figura 41 – Desenho esquemático de um laço do campo solar e imagem do campo real

tores.

Como a temperatura de entrada do sensor, T_{siF} ($^{\circ}\text{C}$), localiza-se no início da malha, há o atraso d_{TiF} (s), que pode ser estimado a cada período de amostragem na forma de um atraso dependente do fluxo como descrito em Normey-Rico et al. (1998):

$$T_{iF}(t) \approx T_{siF}(t - d_{TiF})$$

$$L = \int_0^{d_{TiF}} v(t) dt \rightarrow \frac{T_s}{A_{cs}} \sum_{i=0}^{n-1} f(k-i) = L$$

onde T_s (s) é o período de amostragem, v é a velocidade do fluído (m/s), n é um número de períodos de amostragem, $f(k)$ (m^3/s) é a vazão em k , LA_{cs} é o produto do comprimento, L (m), com a área da seção transversal do tubo, A_{cs} (m^2), e a integral de v é obtida com uma aproximação retangular. Desta maneira pode-se obter n tal que a integral de v resulta aproximadamente em L . Além do exposto, testes apresentados em (ROCA et al., 2009) demonstraram que pode-se assumir $d_c=40\text{s}$ com uma variabilidade de 25% ($d_c \in [30, 50]\text{s}$).

Considerando os elementos apresentados, o modelo simplificado é ex-

presso como segue

$$\rho \cdot C_p \cdot A_a \cdot \frac{\partial T_{oF}(t)}{\partial t} = \beta_I \cdot I(t) - \frac{H}{L_{eq}} \cdot (\bar{T}(t) - T_a(t)) - C_p \cdot \dot{m}_{eq}(t - d_c) \cdot \frac{T_{oF}(t) - T_{iF}(t)}{L_{eq}} \quad (5.37)$$

sendo a temperatura do absorvedor modelada como uma temperatura média, \bar{T} (°C), obtida entre a temperatura de entrada a a temperatura de saída auxiliar como segue:

$$\bar{T}(t) = \frac{T_{oF}(t) + T_{iF}(t)}{2} \quad (5.38)$$

com os parâmetros apresentados na Tabela 1.

Este tipo de modelo simplificado, via descrição a parâmetros concentrados, vem demonstrando bons resultados quando confrontado com os dados de campo, permitindo lidar com variações no fluxo e temperatura de entrada, bem como mudanças significativas na irradiação (ROCA et al., 2008; TORRICO et al., 2010).

Tabela 1 – Parâmetros do processo

Símbolo	Nome	Valor
A_a	área da seção transversal do absorvedor	1.7453e-4; m ²
C_p	capacidade térmica específica	4190 J· kg ⁻¹ .°C ⁻¹
d_c	tempo morto	30-50 s
H	coeficiente de perdas térmicas	4 J· s ⁻¹ · K ⁻¹
L_{eq}	comprimento do tubo absorvedor	5.67 m
β_I	parâmetro de ajuste da irradiação	0.1024 m
ρ	densidade da água	975 kg· m ⁻³

5.3.2.2 Modelo de predição proposto

Um modelo de predição mais simples será proposto com vistas a considerar uma representação linear a partir de uma mudança de variável. Num primeiro momento, Eq. (5.37) será reescrita utilizando a Eq. (5.38) de forma

que ela recai no modelo a seguir

$$\begin{aligned} \dot{T}_{oF}(t) = & -\frac{0.5H}{\rho C_p A_a L_{eq}} T_{oF}(t) - \frac{T_{oF}(t) - T_{iF}(t)}{\rho A_a L_{eq}} \dot{m}_{eq}(t - d_c) \\ & + \frac{0.5H}{\rho C_p A_a L_{eq}} (2T_a(t) - T_{iF}(t)) + \frac{\beta_I}{\rho C_p A_a} I(t). \end{aligned} \quad (5.39)$$

Neste caso, $T_{oF}(t)$ é a variável de processo, $\dot{m}_{eq}(t - d_c)$ é a variável manipulada definida no passado com $I(t)$, $T_a(t)$ e $T_{iF}(t)$ sendo perturbações mensuráveis. Assume-se um modelo de perturbações constantes a despeito da possibilidade de considerar modelos de predição particulares como discutido em Camacho, Berenguel e Rubio (1997, Capítulo 5) por exemplo. Esta idéia não será aplicada nesta estratégia para simplificar o algoritmo de controle.

Como a ação de controle ($u(t) = \dot{m}_{eq}(t)$) não tem efeito entre $T_{oF}(t)$ e $T_{oF}(t + d_c)$, pode-se estimar $T_{oF}(t + d_c)$ como discutido no Capítulo 3. Portanto, considerando a Eq. (5.39) d_c passos adiante, obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{T}_{oF}(t + d_c) = & -\frac{0.5H}{\rho C_p A_a L_{eq}} T_{oF}(t + d_c) - \frac{T_{oF}(t + d_c) - T_{iF}(t + d_c)}{\rho A_a L_{eq}} \dot{m}_{eq}(t) \\ & + \frac{0.5H}{\rho C_p A_a L_{eq}} (2T_a(t + d_c) - T_{iF}(t + d_c)) + \frac{\beta_I}{\rho C_p A_a} I(t + d_c). \end{aligned}$$

Na realidade, as variáveis $T_{iF}(t + d_c)$, $T_a(t + d_c)$ e $I(t + d_c)$ não são conhecidas em t , porém, devido a utilização de um modelo de perturbações constante, considera-se que elas assumem os valores $T_{iF}(t)$, $T_a(t)$ e $I(t)$ respectivamente. Com relação à estimação de $T_{oF}(t + d_c)$, esta será baseada na estrutura do preditor de Smith filtrado.

Assim, definindo uma lei de controle virtual dada por

$$v(t) \triangleq (T_{oF}(t + d_c) - T_{iF}(t)) \dot{m}_{eq}(t),$$

o vetor de perturbações mensuráveis expresso por

$$p(t + d_c) = p(t) \triangleq [I(t) \quad 2T_a(t) - T_{iF}(t)]^T;$$

e o estado futuro sendo

$$x(t + d_c) \triangleq T_{oF}(t + d_c),$$

pode-se considerar o seguinte modelo de predição

$$\dot{x}(t + d_c) = \Phi x(t + d_c) + \Gamma v(t) + \Pi p(t)$$

com $\Phi = -0.5H/(\rho C_p A_a L_{eq})$, $\Gamma = -(\rho A_a L_{eq})^{-1}$ e $\Pi = [\beta_I \ 0.5H/L_{eq}]/(\rho C_p A_a)$. Considerando que não ocorre inversão térmica no campo solar, então verifica-se que $T_{oF}(t + d_c) - T_{iF}(t) \neq 0$ de maneira que a lei de controle virtual é válida na faixa de operação (ROCA et al., 2009).

Neste caso, a discretização do tipo sustentador de ordem zero pode ser utilizada para aproximar o efeito da perturbação em tempo discreto. Assim, o modelo discreto é dado por

$$x(k+1+d) = Ax(k+d) + Bv(k) + Mp(k)$$

com $A = e^{\Phi T_s}$, $B = \int_0^{T_s} e^{\Phi \theta} d\theta \Gamma$ e $M = \int_0^{T_s} e^{\Phi \theta} d\theta \Pi$. Portanto, resta discutir a respeito da estimação robusta do estado futuro $x(k+d) = T_{oF}(k \cdot T_s + d \cdot T_s)$ com $d = d_c/T_s$.

5.3.2.3 Compensação de atraso robusta

Como visto anteriormente, considere que $\tilde{x}(k)$ é uma predição robusta para $x(k+d)$ e $\bar{x}(k+d)$ é o valor nominal da predição. Portanto, $v(k) = (x(k+d) - T_{iF}(k))u(k)$ seria o valor real da lei de controle virtual, a qual não pode ser aplicada uma vez que $x(k+d)$ não é conhecido em k . Assim, pode-se definir uma lei de controle virtual auxiliar como segue

$$\tilde{v}(k) = (\tilde{x}(k) - T_{iF}(k))u(k), \quad (5.40)$$

sendo esta efetivamente usada para fins de controle. A evolução real é dada por

$$x(k+1+d) = Ax(k+d) + Bv(k) + Mp(k) + w(k+d), \quad (5.41)$$

ao passo que a predição nominal (sem incertezas) pode ser obtida como segue

$$\bar{x}(k+1+d) = A\bar{x}(k+d) + B\tilde{v}(k) + Mp(k). \quad (5.42)$$

Deve-se enfatizar que $p(k)$ é uma perturbação mensurável (conhecida) de tal forma que a mesma deve ser considerada na Eq. 5.42. Como o modelo é estável em malha aberta, pode-se utilizar a estrutura do preditor de Smith filtrado como abaixo

$$\tilde{x}(k) = \bar{x}(k+d) + F_r(z^{-1})(x(k) - \bar{x}(k)) \quad (5.43)$$

com os estado preditos dados por

$$\tilde{x}(k+1) = A\tilde{x}(k) + B\tilde{v}(k) + Mp(k) + \tilde{w}(k). \quad (5.44)$$

No Apêndice E.1 demonstra-se que o efeito da perturbação no sistema predito é dado por

$$\tilde{w}(k) = F_r(z^{-1})[w(k) + B(x(k) - \tilde{x}(k-d))u(k)].$$

Este resultado é similar ao caso linear com exceção ao termo bilinear dado por $B(x(k) - \tilde{x}(k-d))u(k)$. Esta parcela decorre da necessidade de utilizar $\tilde{v}(k)$ ao invés de $v(k)$ para fins de predição. Como esperado, o filtro de robustez tem o papel de atenuar todas as fontes de incerteza, o que inclui o efeito da incerteza decorrente da bilinearidade.

5.3.2.4 Estratégia MPC

De maneira similar a (ROCA et al., 2009), deseja-se aplicar uma estratégia que permite rejeitar perturbações constantes. Para tanto, pode-se incluir uma ação integradora ao modelo Eq. (5.44). Portanto, subtraindo a Eq. (5.44) em $k+1$ dela mesma em k , obtém-se uma representação com os estados dados por $\tilde{\chi}(k) = [\tilde{x}(k) \ \tilde{x}(k-1)]^T$ cuja dinâmica é descrita como segue

$$\tilde{\chi}(k+1) = A_\chi \tilde{\chi}(k) + B_\chi \Delta \tilde{v}(k) + M_\chi \Delta p(k) \quad (5.45)$$

$$\tilde{T}_{OF}(t+d) = C_\chi \tilde{\chi}(k) \quad (5.46)$$

com

$$A_\chi = \begin{bmatrix} 1+A & -A \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_\chi = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, C_\chi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T, M_\chi = \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como dito anteriormente, considera-se que as perturbações mensuráveis são constantes o que implica em $\Delta p(k+j) = 0$ para $j \geq 1$. No algoritmo MPC considerado, as variáveis de decisão são os incrementos de controle representados por

$$\tilde{\mathbf{v}}(k) = [\Delta \tilde{v}(k|k) \ \Delta \tilde{v}(k+1|k) \ \dots \Delta \tilde{v}(k+N_u|k)]$$

e o problema de otimização é dado por

$$\begin{aligned} \min_{\tilde{\mathbf{v}}(k)} \quad & \sum_{j=1}^N [\tilde{T}_{oF}(k+d+j|k) - T_{ref}]^2 + \sum_{j=0}^{N_u-1} \lambda [\Delta \tilde{v}(k+j)]^2 \\ \text{s.a.} \quad & T_{\min} \leq \tilde{T}_{oF}(k+d+j|k) \leq T_{\max}, \quad 1 \leq j \leq N, \\ & u_{\min} \leq u(k+j|k) \leq u_{\max}, \quad 0 \leq j \leq N_u - 1. \end{aligned}$$

Deve-se ressaltar que é necessário impor as restrições de controle sobre $u(k)$ ao invés de $\tilde{v}(k)$. Devido à não-linearidade do modelo, a relação entre $u(k+j|k)$ e $\tilde{v}(k+j|k)$ depende de $T_{oF}(k+j|k)$, que por sua vez é função de ações de controles futuras que ainda não foram definidas em k ($u(k|k)$, $u(k+1|k)$, ..., $u(k+j-1|k)$). Como consequência, este problema apresenta restrições não-lineares mesmo utilizando a mudança de variável.

De maneira similar à idéia de mapeamento de restrições aplicadas em Roca et al. (2009), pode-se recorrer a uma solução aproximada, baseada nos incrementos de controle futuros computados na iteração passada ($k-1$). A idéia fundamenta-se na possibilidade de usar, no instante k , as informações de $\tilde{x}(k)$ e $\Delta \tilde{v}(k|k-1)$, ..., $\Delta \tilde{v}(k+N_u-1|k-1)$ com o intuito de obter uma aproximação dos estados futuros $\tilde{x}(k+j|k)$. Em outras palavras, $\tilde{x}(k+j|k-1)$ é uma aproximação para $\tilde{x}(k+j|k)$, obtida a partir do modelo de predição (5.45) com $\Delta \tilde{v}(k|k-1)$, ..., $\Delta \tilde{v}(k+N_u-1|k-1)$ e $\tilde{x}(k)$ conhecidos. Neste caso pode-se definir uma matriz de transformação como segue

$$\mathcal{T}(k) \triangleq \text{diag} \left(\begin{bmatrix} (\tilde{x}(k) - T_{iF}(k))^{-1} \\ (\tilde{x}(k+1|k-1) - T_{iF}(k))^{-1} \\ \vdots \\ (\tilde{x}(k+N_u-1|k-1) - T_{iF}(k))^{-1} \end{bmatrix} \right)$$

cujo principal objetivo é realizar o mapeamento de restrições.

Considere que as restrições sobre o vetor a seguir

$$\mathbf{u}(k) = [\Delta u(k|k) \Delta u(k+1|k) \dots \Delta u(k+N_u|k)]$$

foram originalmente expressas na forma $R_u \cdot \mathbf{u}(k) \leq \mathbf{s}_u(k)$. Então observa-se que

$$\mathbf{u}(k) \approx \mathcal{T}(k) \cdot \tilde{\mathbf{v}}(k) \quad (5.47)$$

se $\tilde{v}(k+j|k-1) \approx \tilde{v}(k+j|k)$, o que representa o mapeamento de restrições de $\mathbf{u}(k)$ para $\tilde{\mathbf{v}}(k)$. O ponto principal é que, para o primeiro elemento de controle, que é efetivamente aplicado em k , não existe erro de aproximação. Isto

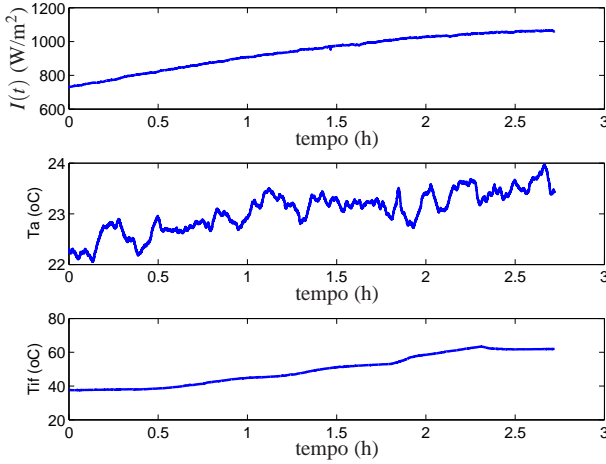


Figura 42 – Perturbações mensuráveis reais

ocorre porque $u(k) = (\tilde{x}(k) - T_{iF}(k))^{-1} \tilde{v}(k)$ com as variáveis $T_{iF}(k)$ e $\tilde{x}(k)$ conhecidas em k . Esta fato significa que as restrições em $u(k)$ são efetivamente respeitadas porque o mapeamento entre $u(k)$ e $\tilde{v}(k)$ é exato.

5.3.2.5 Resultados de simulação

A simulação foi realizada considerando o modelo não-linear apresentado na Eq. (5.37). Para ilustrar o efeito da compensação de atraso robusta, o atraso vazão-temperatura foi definido como 50s para fins de simulação ao passo que utilizou-se $d_c = 40$ s como o valor nominal do atraso. As perturbações mensuráveis, apresentadas na Fig. 42, foram obtidas a partir de um conjunto de dados reais. No sistema real, o principal objetivo de controle é manter a diferença entre as temperaturas de entrada e de saída do água entre 5° e 20°C para otimizar a eficiência e evitar a fadiga dos materiais do coletor. Assim, costuma-se estabelecer a referência da temperatura de saída como $T_{iF} + \Delta T$. Com intuito de testar o algoritmo proposto, ΔT é comutado entre 20 e 15°C a cada hora de simulação.

Serão considerados quatro laços operativos ($n_l = 4$, $n_c = 7$, $n_{cp} = 3$, $n_a = 7$) sendo que a vazão de entrada deve estar entre 1.2 l/s e 4.4 l/s e os limites da temperatura de saída são dados por $T_{\min} = 40$ e $T_{\max} = 90$. Assim como em Ayala et al. (2010), a ponderação de controle é normalizada por λ_n com $\lambda = \lambda_n k_p^2$ sendo $k_p = B/(1 - A)$ o ganho estático nominal de maneira

Tabela 2 – Parâmetros de sintonia

Estratégia	N	N_u	λ	$F_r(z^{-1})$
FL-GPC	50	8	100000	$\frac{0.195z^{-1} - 0.189375z^{-2}}{(1 - 0.925z^{-1})^2}$
NEPSAC	50	1	0	$\frac{0.08}{1 - 0.92z^{-1}}$
CPP	50	8	$20k_p^2$	$\frac{0.1}{1 - 0.9z^{-1}}$

que a seleção de λ_n não depende do ganho do sistema. Utiliza-se a matriz de transformação de tal forma que λ pondera o esforço de controle real e não o virtual. Isto é feito para dar mais uniformidade ao esforço de controle ao longo da simulação.

O algoritmo proposto (CPP) será comparado com um GPC com realimentação linearizante (FL-GPC), proposto em Roca et al. (2009), e um controle auto-adaptativo com previsão não-linear estendida (NEPSAC) para sistemas com atraso apresentado em Torrico et al. (2010). Estes algoritmos utilizam uma estrutura de compensação de atraso do tipo preditor de Smith filtrado. As estratégias propostas em Roca et al. (2009), Torrico et al. (2010) já foram testados em campo, apresentando resultados promissores tanto em simulação, quanto nas provas realizadas na plataforma solar. Os parâmetros de sintonia dos controladores são apresentados na Tabela 2.

É interessante notar que o filtro de robustez do FL-GPC apresenta um zero de cancelamento, utilizado para garantir rejeição de perturbação constante, uma vez que o modelo linear resultante é do tipo integrador na estratégia FL-GPC. Já em Torrico et al. (2010), são usados os parâmetros $\lambda = 0$ and $N_u = 1$ com o objetivo de reduzir o custo computacional dado que é necessário resolver um ou mais problemas de otimização quadrática a cada período de amostragem. Vale ressaltar que para $N_u = 1$, não existe erro de aproximação com o CPP uma vez que o mapeamento da restrição dos controles é exato neste caso. Por fim, deve-se enfatizar que a estrutura do CPP permite realizar a análise do papel do filtro de robustez no contexto do algoritmo de controle. A título de exemplo, existe a possibilidade de realizar, fora de linha, a análise espectral $w(k)$ a partir de dados experimentais. Esta análise pode fornecer informações importantes no sentido de criar procedimentos mais sistemáticos para sintonizar $F_r(z^{-1})$.

Os resultados comparativos são apresentados na Fig. 43 o que indica

a possibilidade de obtenção de bons resultados com os três algoritmos em questão. Apesar da simplicidade de concepção e de formulação do CPP, verifica-se por meio de simulação que os resultados são similares. Com relação ao custo computacional, o CPP é mais simples do que o algoritmo proposto em (TORRICO et al., 2010) dado que é necessário resolver o problema de otimização apenas uma vez a cada período de amostragem. Se comparado ao FL-GPC, o CPP é mais simples uma vez que o filtro de robustez deve ser ajustado para um modelo estável em malha aberta. Em resumo, o PMPC apresenta resultados tão bons quanto as estratégias recente, mas proporciona novas perspectivas no que diz respeito ao ajuste do filtro de robustez devido à nova interpretação do seu papel.

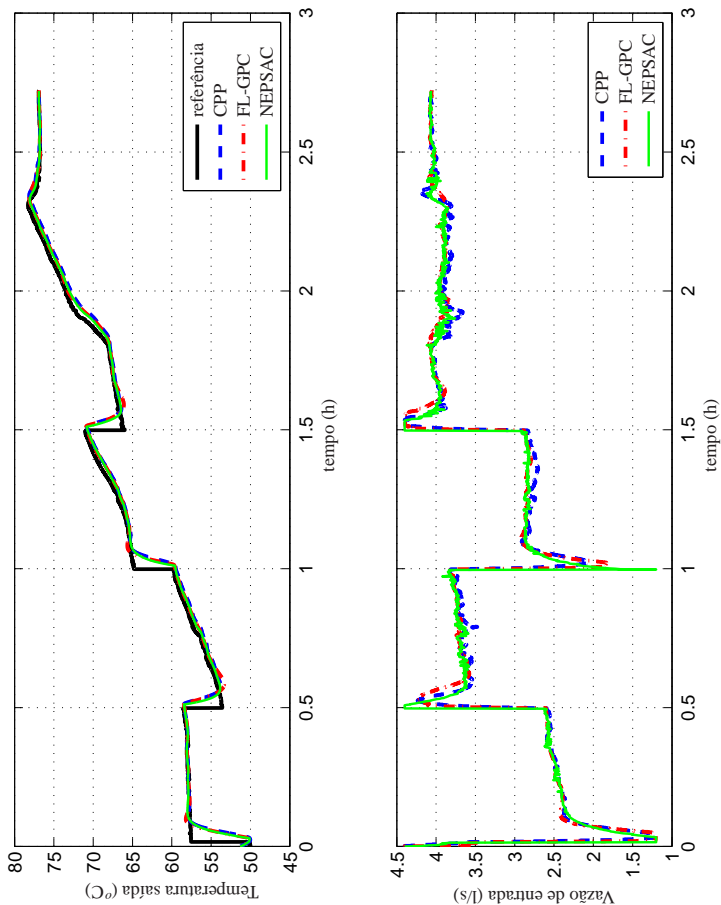


Figura 43 – Simulações com perturbações obtidas num dia ensolarado.

5.3.3 Sistema de aquecimento didático

Caso 3 Sistema linear de primeira ordem.

A seguir será apresentado o algoritmo robusto para seguimento de referência com compensação de atraso que será aplicado no controle do sistema de aquecimento didático. Ele é similar ao apresentado no Capítulo 4 com exceção ao fato de que se considera o problema de seguimento de referência, o que será discutido adiante.

5.3.3.1 MPC baseado em tubos para seguimento de referência com compensação de atraso

O principal objetivo deste algoritmo é realizar o seguimento de referência y_r do sistema com atraso e restrições na presença de perturbações, utilizando um modelo de predição sem atraso. Sabe-se que em função dos limites do domínio de atração de um controlador preditivo, é possível perder factibilidade do algoritmo de otimização devido a uma mudança brusca de referência. Este problema pode ser evitado utilizando uma referência artificial (\bar{y}_s) que converge para a referência real caso esta seja alcançável e admissível, como proposto em Limon et al. (2010). Esta referência artificial é uma variável do problema de otimização que permite assegurar factibilidade recursiva mesmo com mudanças bruscas de referência. Desta maneira garante-se que ao a partir de um ponto de equilíbrio admissível, então assegura-se estabilidade e satisfação robusta de restrições durante toda a sua operação desde que as perturbações respeitem os limites estabelecidos.

O caso geral para o problema de parametrização de todos os pontos estacionários de um dado sistema linear é discutido em Limon et al. (2010). Considerando o modelo de primeira ordem sem perturbações do tipo

$$y(k) = \frac{kp}{1 - az^{-1}}u(k),$$

é fácil observar que para um determinado valor de saída em regime permanente \bar{y}_s , então o sinal de controle em regime, associado a esta saída, é dado por

$$u_s = \frac{1 - a}{k_p} \bar{y}_s = \frac{1 - a}{k_p} \bar{x}_s. \quad (5.48)$$

Desta maneira, pode-se definir o problema de otimização do MPC robusto

para seguimento de referencia como segue

$$\min_{\bar{x}_0, \bar{u}_i, \bar{x}_s} \sum_{i=0}^{N-1} (\|\bar{x}_i - \bar{x}_s\|_{Q_x}^2 + \|\bar{u}_i - \bar{u}_s\|_{Q_u}^2) + \|\bar{x}_N - \bar{x}_s\|_P^2 + \|\bar{y}_s - y_r\|_T^2 \quad (5.49)$$

s.a:

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 &\in \tilde{x}(k) \oplus (-Z) \\ \bar{x}_{i+1} &= A\bar{x}_i + B\bar{u}_i \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \\ (\bar{x}_i, \bar{u}_i) &\in \bar{\mathbb{X}} \times \bar{\mathbb{U}}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \\ \bar{u}_s &= \frac{1-a}{k_p} \bar{x}_s, \quad \bar{y}_s = \bar{x}_s \\ (\bar{x}_N, \bar{x}_s) &\in X_{a,f}. \end{aligned}$$

com o centro do tubo inicial (\bar{x}_0), a sequência de controle nominal (\bar{u}_i) e a referência artificial (\bar{x}_s) sendo variáveis de decisão do problema de otimização. Para garantir estabilidade robusta, é necessário impor as seguintes condições aos elementos do problema de otimização.

- i) $\tilde{x}(k)$ é dado pela saída do esquema de compensação de atraso;
- ii) K_w e K_f são ganhos estabilizantes tais que todos os autovalores das matrizes $A + BK_w$ e $A + BK_f$ estão estritamente no interior do círculo unitário;
- iii) Z é uma aproximação invariante exterior do mrpi tal que $(A + BK_w)Z \oplus \tilde{\mathbb{W}} \subseteq Z$;
- iv) $\bar{\mathbb{X}} = \mathbb{X} \ominus \mathbb{E} \ominus Z$ e $\bar{\mathbb{U}} = \mathbb{U} \ominus K_w Z$ são conjuntos não vazios;
- v) $X_{a,f}$ é um conjunto invariante admissível para seguimento de referência para o caso nominal como discutido em Limon et al. (2010). Em termos gerais, ele é dado pelo conjunto de todos os estados e referências para os quais se $\bar{x}_i \in \bar{\mathbb{X}}, \bar{y}_s \in C\bar{\mathbb{X}}$ pertencem a este conjunto, então $\bar{x}_{i+1} \in \bar{\mathbb{X}}$ também pertencerá com $K_f \bar{x}_i \in \bar{\mathbb{U}}$.
- vi) As matrizes Q_x, Q_u e T são tais que $Q_x > 0, Q_u > 0$ e $T > 0$;
- vii) $P > 0$ é uma solução da equação a seguir

$$(A + BK_f)'P(A + BK_f) - P + K_f'Q_uK_f + Q_x = 0;$$

- viii) $u(k) = \kappa(\tilde{x}(k), y_r) = \bar{u}_0^*(k) + K_w(\bar{x}_0^*(k) - \tilde{x}(k))$ com $\bar{u}_0^*(k)$ e $\bar{x}_0^*(k)$ sendo o argumento que minimiza (5.49) em k .

Estas condições asseguram estabilidade entrada-estado do sistema predito se $\hat{w}(k) \in \tilde{\mathbb{W}}$, como demonstrado em Limon et al. (2010), e satisfação robusta de restrições caso $e(k) \in \mathbb{E}$, como discutido no Lema 1. O ponto que diferencia o preditor ótimo do preditor de Smith filtrado é o impacto que $w(k)$ causa em $\hat{w}(k)$ e $e(k)$. Como discutido, o efeito do preditor altera a forma de definir $\tilde{\mathbb{W}}$ e \mathbb{E} e, por consequência, os conjuntos $\tilde{\mathbb{X}}$ e $\tilde{\mathbb{U}}$ dependem do esquema de predição.

A principal diferença deste algoritmo, se comparado ao proposto em Limon et al. (2010), está no fato de que a dimensão dos elementos que compõe o problema de otimização não depende do atraso. A título de exemplo, um problema integrador com 40 atrasos discretos (FLESCHE; NORMEY-RICO, 2010) implicaria num modelo com 41 estados. O número de estado é uma característica importante em controladores preditivos robustos por afeta o custo computacional de elementos estabilizantes como o mínimo conjunto invariante robusto. Além disso, sabe-se que a solução do problema de programação quadrática pode ser parametrizado por um conjunto soluções afim no estado que particionam o espaço de estados admissíveis. Portanto, a dimensão da partição depende do número de estados, que por sua vez é afetado pelo tamanho do atraso na abordagem implícita.

5.3.3.1.1 Correção da referência na presença de perturbações constantes

É fácil notar que a relação (5.48) deixa de ser válida na presença de perturbações. Para rejeitar perturbações que atingem um valor estacionário representado por $w(\infty)$, basta aplicar um fator de correção correspondente a esta perturbação. Assim, utiliza-se uma referência modificada, $y_r^m(k)$, para considerar o efeito da perturbação, de maneira que quando $y_s(k) \rightarrow y_r^m(k)$, então $y(\infty) = y_\infty \rightarrow y_r$. referência modificada dada por

$$y_s^m(k) = y_s - M\hat{w}(k)$$

sendo $M\hat{w}(k)$ o efeito da perturbação na saída com o valor de M obtido como apresentado no Apêndice F e $\hat{w}(k)$ uma estimação para $w(\infty)$.

A única consideração imposta a $\hat{w}(k)$ é a de que estimador deve ser BIBO estável. Como a factibilidade do controlador não depende da referência, esta mudança de referência não afeta a estabilidade da estratégia MPC. Note que $\hat{w}(k)$ pode ser estimado a partir da filtragem do sinal $w(k-1) = x(k) - (Ax(k-1) - Bu(k-1))$. É conveniente utilizar um filtro de estimação para evitar que ruídos de alta frequência sejam enviados à referência.

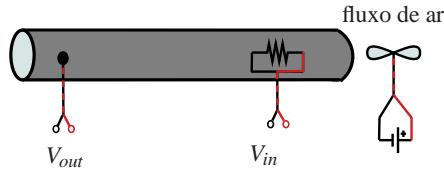


Figura 44 – Representação esquemática simplificada do sistema de aquecimento.

5.3.3.2 Resultados experimentais

No sistema de aquecimento considerado, deseja-se controlar a temperatura na saída de um tubo, variando a potência dissipada num resistor localizado no outro extremo do tubo. Um fluxo de ar constante é utilizado para levar o calor de um extremo ao outro do tubo. A potência dissipada no resistor é determinada por uma tensão de entrada ($V_{in}(k)$), sendo esta a variável manipulada do sistema de controle. Um sensor, localizado na saída do tubo, indica a temperatura em termos de tensão de saída ($V_{out}(k)$), sendo esta a variável de processo. Pode-se aplicar variações no valor do fluxo de ar para criar perturbações do tipo constante. Um diagrama esquemático é apresentado na Fig. 44 com $y(k) = V_{out}(k)$, $u(k) = V_{in}(k)$ ao passo que variações no fluxo de ar afetam $w(k)$. Tanto a tensão de entrada quanto a de saída devem pertencer à mesma faixa ($0 \leq y(k) \leq 10$ V e $0 \leq u(k) \leq 10$ V), devido às restrições imposta pela placa de aquisição de dados e de geração e sinais.

Com relação à identificação, optou-se por utilizar um modelo de primeira ordem com atraso dado que: i) é muito comum encontrá-los em situações práticas, ii) dispensa o uso de observadores ou representações não-mínimas e iii) porque simplifica a definição dos elementos estabilizantes da estratégia MPC. Será aplicado um algoritmo MPC robusto baseado numa solução multi-paramétrica do problema de otimização (BEMPORAD et al., 2002). Esta técnica permite obter um conjunto de soluções lineares as quais estão associadas à regiões definidas pela referência desejada e pela saída. Desta forma, o custo computacional do algoritmo MPC é significativamente reduzido, possibilitando a utilização de períodos de amostragem relativamente menores. Para ressaltar o baixo custo computacional do algoritmo proposto, será utilizado um período de amostragem $T_s = 50ms$. O modelo obtido por meio de testes com sinais do tipo sequência binária pseudo aleatórias é dado por

$$P(z) = \frac{k_p}{z-a} z^{-d} = \frac{0.067}{z-0.9065} z^{-3}$$

de maneira que o mesmo sistema pode ser descrito por

$$\begin{aligned}x(k+1) &= 0.9065x(k) + 0.0674u(k-3) + w(k) \\ y(k) &= x(k)\end{aligned}$$

O grande problema de estratégias baseadas em tubos está no conservadorismo associado à representação das incertezas. Isto se evidencia em problemas reais pois é comum o surgimento de picos em $w(k)$, geralmente relacionados a perturbações de carga tipo degrau ou variações de referência, os quais são considerados durante toda a operação do sistema de controle. Apesar de surgirem pontualmente, devem estar implicitamente considerados em \mathbb{W} uma vez que é necessário garantir que $w(k) \in \mathbb{W}$ para todo k . No caso da compensação de atraso, a garantia de estabilidade robusta depende essencialmente do fato de que a perturbação predita deve pertencer ao conjunto $\tilde{\mathbb{W}}$. Isto significa que um filtro de robustez do tipo passa-baixas pode atenuar estes picos, reduzindo o conservadorismo associado à descrição da incerteza, uma vez que $\tilde{\mathbb{W}}$ pode ser menor do que o utilizado com o preditor ótimo. Além disso, o filtro de robustez cumpre um papel importante no sentido de atenuar ruídos de altas frequências e erros de modelagem, o que tende a induzir a um comportamento mais suave com relação às ações de controle. É importante ressaltar que $\tilde{w}(k)$ também pode ser obtido em $k+1$, o que permite estimar $\tilde{\mathbb{W}}$ da mesma maneira que é feito com \mathbb{W} . A seguir, estas questões serão avaliadas a partir dos resultados experimentais obtidos com utilização do preditor ótimo e do preditor de Smith filtrado no controle do sistema de aquecimento didático.

Os parâmetros de sintonia dos MPC baseado em tubo são $Q = 1, R = 1, T = 100$ and $N = 5$. Os elementos estabilizantes K_f e P são obtidos a partir da solução ótima do problema sem restrição (controlador LQR) para (A, B, Q, R) . Assim como em (MAYNE; SERON; RAKOVIC, 2005), utiliza-se $K_w = K_f$. Um filtro de segunda ordem na forma

$$F(z) = \left(\frac{0.05z}{z - 0.95} \right)^2$$

é utilizado para estimar o valor médio da perturbação. Para o caso do preditor de Smith filtrado utiliza-se

$$F_r(z) = a^d \left(\frac{(1 - 0.85)z}{z - 0.85} \right).$$

Deve-se ressaltar que neste algoritmo não é necessário ganho estático unitário para o filtro de robustez uma vez que a eliminação do erro em regime é

realizado como proposto no Apêndice F. A escolha do filtro de robustez com $F_r(1) = a^d$ realizada de forma proposital para que o ganho contínuo (DC) de $\tilde{w}(k)$ seja idêntico (a^d) em ambos os casos.

A simulação é composta por quatro mudanças de referência e da aplicação de perturbações abruptas por duas vezes, através da variação do fluxo de ar. Os resultados de simulação são apresentados na Fig. 45. Devido à natureza do teste, torna-se difícil repetir as mesmas condições experimentais. No entanto, pode-se perceber que ambos controladores apresentaram desempenho satisfatório. Nesta figura, a região interna em cinza claro representa todos os possíveis casos para a saída predita, considerando \tilde{W} ao passo que a região externa indica todos os possíveis casos para a saída real. A garantia de satisfação robusta se dá uma vez que o algoritmo proposto impõe que a região externa respeite as restrições. Pode-se notar que a região em cinza claro é menor no caso do preditor de Smith filtrado uma vez que pode-se considerar um conjunto \tilde{W} menor. Por outro lado, um possível aumento no erro de predição se manifesta no tamanho da região externa que é maior para o preditor de Smith filtrado.

Na Fig. 46 observa-se que a ação de controle no caso do preditor ótimo apresenta picos um pouco maiores do que com o preditor de Smith filtrado. Este resultado é comum em sistemas com erro de modelagem uma vez que o filtro de robustez atenua o efeito das incertezas, o que tende a criar um comportamento mais suave para a ação de controle. Por fim pode-se observar o efeito das incertezas na Fig. 47. Como esperado para este tipo de sistema, a medida é contaminada por ruídos de alta frequência que se manifestam através de $w(k)$. No entanto, ao analisar $\tilde{w}(k)$, verifica-se uma atenuação importante no caso do preditor de Smith filtrado. Deve-se enfatizar que existem picos em $w(k)$ de ambos os casos, no entanto estes picos não aparecem em $\tilde{w}(k)$ para o caso do preditor de Smith filtrado. Este resultado experimental permite verificar alguns aspectos teóricos desenvolvidos ao longo deste capítulo e enfatiza a importância das discussões do Capítulo 2.

5.4 CONCLUSÕES

O papel do preditor de Smith filtrado na presença de incertezas e restrições foi discutido neste capítulo. Para tanto, foram propostas representações que permitem utilizar esquemas de predição tipo entrada-saída em termos de funções de transferência. Desta maneira demonstra-se, por meio da estrutura equivalente, que as incertezas deste sistema equivalente podem de ser convenientemente atenuadas. Por outro lado, o ajuste do filtro de robustez impõe um compromisso entre a atenuação das incertezas e o efeito do erro

de predição, que por sua vez afeta o cumprimento das restrições dos estados. Três estudos de caso são apresentados para ilustrar a importância do filtro de robustez e das discussões deste capítulo no que diz respeito ao papel da compensação de atraso em sistemas com restrições.

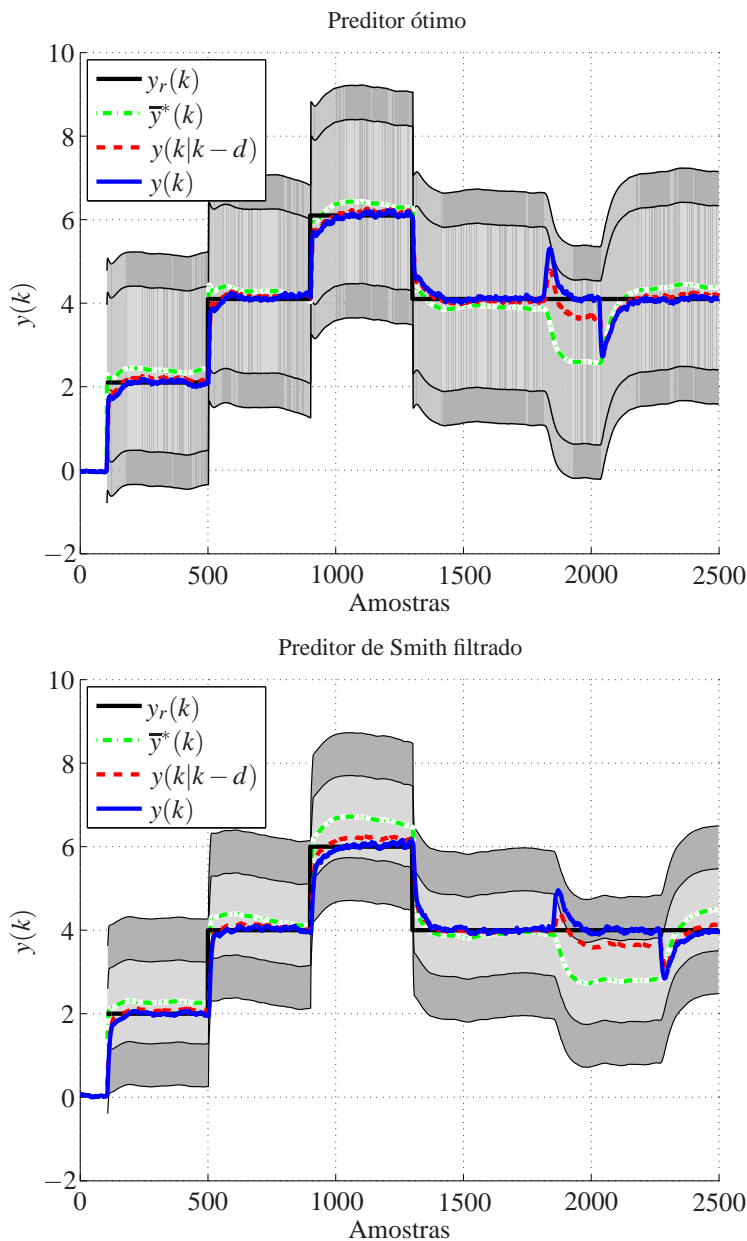


Figura 45 – Comparação das saída para o controlador com o preditor ótimo e com o preditor de Smith filtrado.

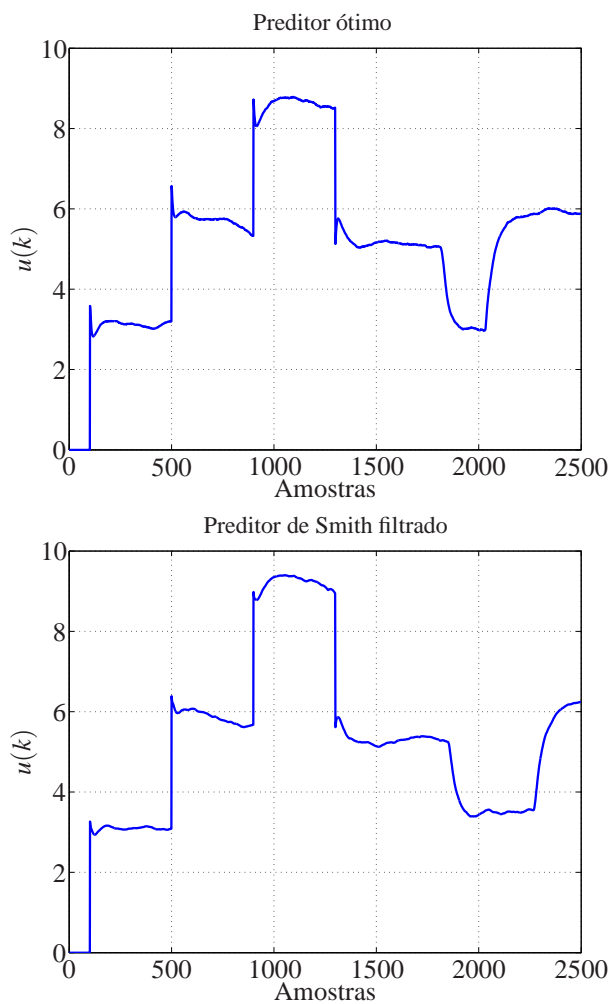


Figura 46 – Comparação do sinal de controle para os esquemas com o preditor ótimo e com o preditor de Smith filtrado.

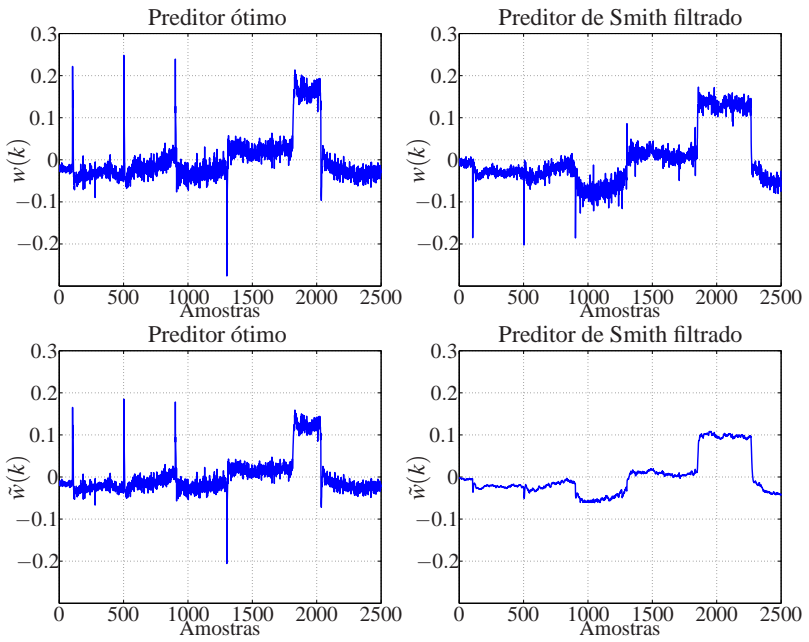


Figura 47 – Comparação da perturbação aditiva para os esquemas com o preditor ótimo e com o preditor de Smith filtrado.

6 CONCLUSÃO

Ao longo desta tese apresentou-se uma discussão sobre a compensação de atraso robusta para sistemas com restrições. Foi desenvolvido um método para realizar a análise do efeito das incertezas em sistemas de controle que utilizam compensação de atraso. Esta análise baseia-se na avaliação das incertezas através de uma representação equivalente que corresponde ao processo com atraso e a estrutura de compensação de atraso robusta. Assim, os problemas de síntese e análise do sistema com atraso podem ser realizados a partir de uma representação sem atraso sujeita a uma perturbação modificada e um erro de predição.

De um ponto de vista mais específico, o estudo permitiu detalhar as diferenças existentes entre a estrutura de compensação de atraso inerente aos controladores preditivos (preditor ótimo) e o preditor de Smith filtrado. Como consequência, foi possível demonstrar que o preditor de Smith filtrado pode ser utilizada para melhorar a robustez de controladores preditivos na presença de restrições. Este é um resultado importante pois o mesmo era verificado na prática, porém não havia estudos formais a este respeito. Além dos pontos citados, foi proposto um procedimento para simplificação de ajuste do filtro de robustez para plantas instáveis. Desta maneira, acredita-se que estes resultados consolidam o preditor de Smith filtrado como uma alternativa interessante ser considerada em estratégias de controle preditivo para sistemas com atraso e restrições.

6.1 CONTRIBUIÇÕES PRINCIPAIS

As principais contribuições desta Tese serão relacionadas a seguir :

- Apresentação de um método de estudo a respeito do efeito da compensação de atraso na presença de incertezas e restrições;
- Proposição de uma estratégia de compensação de atraso explícita que permite utilizar estratégias MPC robustas baseadas em modelos sem atraso;
- Extensão dos resultados de compensação de atraso explícita para sistemas com estados não mensuráveis;
- Apresentação de uma formulação alternativa, baseada no preditor de Smith filtrado, que possibilita garantir estabilidade e satisfação robusta de restrições.

Com relação ao método de estudo proposto, baseado na representação equivalente sem atraso, este é um procedimento de análise sistemático, que pode ser aplicado a outras estratégias de compensação de atraso, além daquelas discutidas nesta tese. No que diz respeito à síntese de controladores robustos com compensação de atraso, foram propostas estratégias que permitem assegurar estabilidade e satisfação robusta de restrições considerando compensação de atraso com realimentação de estados e realimentação de saída. Por fim, apresentou-se uma formulação que permite inserir o preditor de Smith filtrado no contexto de estratégias de controle preditivo com garantia de estabilidade e satisfação robusta de restrições. Esta formulação alternativa permite realizar uma análise comparativa entre o papel preditor de Smith filtrado e o do preditor ótimo na presença de incertezas.

Além das contribuições já apresentadas, esta trabalho possibilitou o desenvolvimento de outros resultados interessantes:

- Simplificação dos procedimentos de sintonia para o preditor de Smith Filtrado;
- Proposição de uma representação em espaço de estados que possibilita considerar a compensação de distintos atrasos por saída;
- Realização de uma discussão comparativa envolvendo o preditor de Smith filtrado e a estratégia de compensação de atraso convencional;
- Apresentação de estudo de casos que ressaltam a importância da compensação de atraso robusta em sistemas de controle com atraso.

O novo procedimento de sintonia para o preditor de Smith filtrado permite acomodar o compromisso entre os requisitos de malha de maneira mais natural. A nova representação em espaço, que considera distintos atrasos efetivos por saída, permitiu ampliar o escopo da discussão, ao tratar de maneira teórica uma estrutura de compensação de atraso já empregada na prática. Já o estudo comparativo, envolvendo preditor ótimo e o preditor de Smith filtrado, evidencia a utilidade deste último na atenuação do efeito de perturbações.

6.1.1 Lista de publicações

A seguir serão apresentadas as publicações desenvolvidas como decorrência das atividades relacionadas a esta tese.

6.1.1.1 Periódicos Aceitos

(SANTOS; BOTURA; NORMEY-RICO, 2010) Dealing with noise in unstable dead-time process control. *Journal of Process Control*, v. 20, n. 7, p. 840 - 847, 2010.

(GARCIA et al., 2010) Smith predictor-based control schemes for dead-time unstable cascade processes. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, v. 49, n. 22, p. 11471 - 11481, 2010.

6.1.1.2 Conferências Aceitas

(SANTOS; NORMEY-RICO, 2009a) Dealing with measurement noise in integrative dead-time process. In: *Proceedings of European Control Conference*. Budapest - Hungria, 2009.

(SANTOS; NORMEY-RICO, 2009b) Robust model predictive controller with terminal weighting for multivariable dead-time processes. In: *Anais do 8º Workshop on Time Delay Systems*. Sinaia - Romênia, 2009.

(SANTOS; NORMEY-RICO; LIMON, 2010) Explicit input-delay compensation for robustness improvement in MPC. In: *Anais do 9º Workshop on Time Delay Systems*. Praga - República Tcheca, 2010.

(SANTOS et al., 2010) Robust tube based model predictive control for constrained systems with dead-time. In: *Proceedings of the UKACC International Conference on Control*. Coventry - Inglaterra, 2010.

(SANTOS; AYALA; NORMEY-RICO, 2010) Controle preditivo robusto para aplicações não-lineares baseado em modelos locais. In: *Anais do XVIII Congresso Brasileiro de Automática*. Bonito - Brasil, 2010.

(SANTOS et al., 2011) Practical MPC with robust dead-time compensation applied to a solar desalination plant. In: *Para aparecer nos anais do 18º Congresso Mundial do IFAC*. Milão - Itália.

(LIMON et al., 2011) Robust design of dead-time compensator controllers for constrained non-linear systems. In: *Para aparecer nos anais do 50º IEEE Control and Decision Conference*. Orlando - Estados Unidos, 2011.

6.1.1.3 Periódicos em revisão

(SANTOS; LIMON; NORMEY-RICO, 2011) On the explicit dead-time compensation in robust model predictive control. Submetido ao *Journal of Process Control*, v. 0, n. 0, p. 0 - 0, 2011.

6.2 PERSPECTIVAS DE ATIVIDADES FUTURAS

As discussões sobre o tema do atraso em controladores preditivos é relativamente recente o que indica a necessidade de amadurecimento de diversos pontos de pesquisa. Dentre os pontos relacionados a esta tese, destacam-se:

- A utilização do conceito de compensação de atraso robusta em outras técnicas de controle preditivo com garantias de estabilidade e restrições;
- Estudo do efeito da compensação de atraso para outros tipos de incertezas a exemplo de inclusões politópica;
- Desenvolvimento de novas ferramentas que permitam tratar do problema geral, com atrasos nos estados, sem a necessidade de recorrer à representação aumentada;
- Tratamento de problemas não-lineares a exemplo do que vem sendo desenvolvido em (LIMON et al., 2011);
- Desenvolvimento de novas técnicas voltadas para o problema do atraso variável;
- Aplicação de técnicas de compensação de atraso robusta em sistemas reais;
- Desenvolvimento de procedimento sistemático para ajuste do filtro de robustez baseada em informações obtidas do processo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALBERTOS, P.; GARCIA, P. Robust control design for long time-delay systems. *Journal of Process Control*, v. 19, n. 10, p. 1640 – 1648, 2009.

AYALA, C.; ROCA, L.; GUZMAN, J. L.; NORMEY-RICO, J. E.; BERENGUEL, M.; YEBRA, L. J. Local model predictive controller in a solar desalination plant collector field. *Submitted to Renewable Energy*, 2010.

BEMPORAD, A.; MORARI, M.; DUA, V.; PISTIKOPOULOS, E. N. The explicit linear quadratic regulator for constrained systems. *Automatica*, v. 38, n. 1, p. 3 – 20, 2002.

BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in systems and control theory*. Filadélfia: SIAM, 1994.

CAMACHO, E.; BORDONS, C. *Model Predictive Control*. London: Springer-Verlag, 2004.

CAMACHO, E. F.; BERENGUEL, M.; RUBIO, F. *Advanced control of solar plants*. London: Springer Verlag, 1997.

CLARKE, D.; SCATTOLINI, R. Constrained receding-horizon predictive control. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings D*, v. 138, n. 4, p. 347–354, Jul 1991.

DING, B. Robust model predictive control for multiple time delay systems with polytopic uncertainty description. *International Journal of Control*, v. 83, n. 9, p. 1844– 1857, 2010.

FLESCHE, R. C. C.; NORMEY-RICO, J. E. Modelling, identification and control of a calorimeter used for performance evaluation of refrigerant compressors. *Control Engineering Practice*, v. 18, n. 3, p. 254 – 261, 2010. ISSN 0967-0661.

GARCIA-GABIN, W.; CAMACHO, E. Application of multivariable GPC to a four tank process with unstable transmission zeros. In: *Control Applications, 2002. Proceedings of the 2002 International Conference on*. Glasgow: , 2002. v. 2, p. 645–650 vol.2.

GARCIA, P.; ALBERTOS, P.; HAGGLUND, T. Control of unstable non-minimum-phase delayed systems. *Journal of Process Control*, v. 16, n. 10, p. 1099–1111, 2006.

GARCIA, P.; SANTOS, T. L. M.; NORMEY-RICO, J. E.; ALBERTOS, P. Smith predictor-based control schemes for dead-time unstable cascade processes. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, v. 49, n. 22, p. 11471–11481, 2010.

GARCIA, P.; ALBERTOS, P. A new dead-time compensator to control stable and integrating processes with long dead-time. *Automatica*, v. 44, n. 4, p. 1062–1071, 2008.

GILBERT, E. G.; TAN, K. T. Linear systems with state and control constraints: The theory and application of maximal output admissible sets. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 36, n. 9, p. 1008–1020, 1991.

GONZÁLEZ, A. H.; ODLOAK, D. Robust model predictive control for time delayed systems with optimizing targets and zone control. *Robust Control, Theory and Applications*, Andrzej Bartoszewicz (Ed.), 2011.

GONZÁLEZ, A. H.; PEREZ, J. M.; ODLOAK, D. Infinite horizon MPC with non-minimal state space feedback. *Journal of Process Control*, v. 19, n. 3, p. 473 – 481, 2009. ISSN 0959-1524.

GRUBER, J.; RAMIREZ, D.; ALAMO, T.; CAMACHO, E. Min-max MPC based on an upper bound of the worst case cost with guaranteed stability. application to a pilot plant. *Journal of Process Control*, v. 21, n. 1, p. 194 – 204, 2011.

JIANG, Z.-P.; WANG, Y. Input-to-state stability for discrete-time nonlinear systems. *Automatica*, v. 37, n. 6, p. 857 – 869, 2001.

JOHANSSON, K. The quadruple-tank process: a multivariable laboratory process with an adjustable zero. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, v. 8, n. 3, p. 456–465, May 2000. ISSN 1063-6536.

KOLMANOVSKY, I.; GILBERT, E. G. Theory and computation of disturbance invariant sets for discrete-time linear systems. *Mathematical Problems in Engineering: Theory, Methods and Applications*, v. 4, n. 4, p. 317–367, 1998.

KOTHARE, M. V.; BALAKRISHNAN, V.; MORARI, M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities., *Automatica*, v. 32, n. 10, p. 1361 – 1379, 1996. ISSN 0005-1098.

KOUHI, Y.; ADLGOSTAR, R.; LABIBI, B.; FATEHI, A.; FAKHIMI, S. Multivariable control design for MIMO flow-level control plant. In: *EUROCON, 2007. The International Conference on Computer as a Tool*. Warsaw - Polônia: , 2007. p. 725–730.

KWON, W. H.; KANG, J. W.; LEE, Y. S.; MOON, Y. S. A simple receding horizon control for state delayed systems and its stability criterion. *Journal of Process Control*, v. 13, n. 6, p. 539 – 551, 2003.

KWON, W. H.; LEE, Y. S.; HAN, S. H. General receding horizon control for linear time-delay systems. *Automatica*, v. 40, n. 9, p. 1603 – 1611, 2004.

LEE, Y. S. Receding-horizon control for linear time-delay systems. In: *Proceedings of the XVI IFAC Triennial Congress*. Seoul-Coréia do Sul: , 2005.

LIMON, D.; ALAMO, T.; RAIMONDO, D. M.; PEÑA, D. M. de la; BRAVO, J. M.; FERRAMOSCA, A.; CAMACHO, E. Input-to-state stability: A unifying framework for robust model predictive control. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, v. 20, n. 3, p. 1–26, 2010.

LIMON, D.; ALVARADO, I.; ALAMO, T.; CAMACHO, E. Mpc for tracking piecewise constant references for constrained linear systems. *Automatica*, v. 44, n. 9, p. 2382 – 2387, 2008. ISSN 0005-1098.

LIMON, D.; ALVARADO, I.; ALAMO, T.; CAMACHO, E. Robust tube-based mpc for tracking of constrained linear systems with additive disturbances. *Journal of Process Control*, v. 20, n. 3, p. 248 – 260, 2010.

LIMON, D.; POMAR, M.; NORMEY-RICO, J. E.; SANTOS, T. L. M. Robust design of dead-time compensator controllers for constrained non-linear systems. In: *Submetido ao 50o Control and Decision Conference*. Orlando - Estados Unidos: , 2011.

MAYNE, D. Q.; RAKOVIC, S. V.; FINDEISEN, R.; ALLGOWER, F. Robust output feedback model predictive control of constrained linear systems. *Automatica*, v. 42, n. 7, p. 1217–1222, Jul. 2006.

MAYNE, D. Q.; RAWLINGS, J. B.; RAO, C. V.; SCOKAERT, P. O. M. Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, v. 36, n. 6, p. 789 – 814, 2000.

MAYNE, D. Q.; SERON, M. M.; RAKOVIC, S. V. Robust model predictive control of constrained linear systems with bounded disturbance. *Automatica*, v. 41, n. 2, p. 219–224, Fev. 2005.

MORARI, M.; ZAFIRIOU, E. *Robust Process Control*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989.

NORMEY-RICO, J.; BORDONS, C.; BERENGUEL, M.; CAMACHO, E. A robust adaptive dead-time compensator with application to a solar collector field. In: *1st IFAC International Workshop on Linear Time Delay*. Grenoble, France: , 1998.

NORMEY-RICO, J.; CAMACHO, E. Robustness effect of a prefilter in smith predictor based generalised predictive control. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings -*, v. 146, n. 2, p. 179–185, 1999.

NORMEY-RICO, J.; CAMACHO, E. Multivariable generalised predictive controller based on the smith predictor. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings -*, v. 147, n. 5, p. 538–546, Sept. 2000.

NORMEY-RICO, J. E.; CAMACHO, E. F. *Control of Dead-time Processes*. London: Springer-Verlag, 2007.

NORMEY-RICO, J. E.; CAMACHO, E. F. Unified approach for robust dead-time compensator design. *Journal of Process Control*, v. 19, n. 1, p. 38 – 47, 2009. ISSN 0959-1524.

OLARU, S.; NICULESCU, S.-I. Predictive control for linear systems with delayed input subject to constraints. In: *Proceedings of the XVII IFAC Triennial Congress*. Seoul - Coréia do Sul: , 2008.

PARK, J. H.; YOO, H. W.; HAN, S.; KWON, W. H. Receding horizon control for input-delayed systems. In: *46th IEEE Conference on Decision and Control*. Louisiana - Estados Unidos: , 2007. p. 1368–1373.

PLUYMERS, B.; ROSSITER, J. A.; SUYKENS, J. A. K.; MOR, B. de. The efficient computation of polyhedral invariant sets for linear systems with polytopic uncertainty. In: *Proceedings of American Control Conference*. Portland - Estados Unidos: , 2005. p. 804–809.

QIN, S. J.; BADGWELL, T. A. A survey of industrial model predictive control technology. *Control Engineering Practice*, v. 11, n. 7, p. 733 – 764, 2003. ISSN 0967-0661.

RAKOVIC, S.; KERRIGAN, E.; KOURAMAS, K.; MAYNE, D. Invariant approximations of the minimal robust positively invariant set. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 50, n. 3, p. 406–410, Mar. 2005.

RAO, C. V.; WRIGHT, S. J.; RAWLINGS, J. B. Application of interior-point methods to model predictive control. *Journal of Optimization theory and applications*, v. 99, n. 3, p. 723–757, 1998.

ROCA, L.; BERENGUEL, M.; YEBRA, L. J.; ALARCÓN-PADILLA, D. Solar field control for desalination plants. *Solar Energy*, v. 82, p. 772–786, 2008.

ROCA, L.; GUZMÁN, J. L.; NORMEY-RICO, J. E.; BERENGUEL, M.; YEBRA, L. J. Robust constrained predictive feedback linearization controller in a solar desalination plant collector field. *Control Engineering Practice*, v. 17, p. 1076–1088, 2009.

ROSSITER, J. A. *Model Based Predictive Control: a practical approach*. Boca Raton: CRC Press, 2003.

SANTOS, T. L. M.; AYALA, C.; NORMEY-RICO, J. E. Controle preditivo robusto para aplicações não-lineares baseado em modelos locais. In: *Anais do XVIII Congresso Brasileiro de Automática*. Bonito - Brasil: , 2010.

SANTOS, T. L. M.; BOTURA, P. E. A.; NORMEY-RICO, J. E. Dealing with noise in unstable dead-time process control. *Journal of Process Control*, v. 20, n. 7, p. 840 – 847, 2010.

SANTOS, T. L. M.; LIMON, D.; ALAMO, T.; NORMEY-RICO, J. E. Robust tube based model predictive control for constrained systems with dead-time. In: *Proceedings of the UKACC International Conference on Control*. Coventry - Inglaterra: , 2010.

SANTOS, T. L. M.; LIMON, D.; NORMEY-RICO, J. E. On the explicit dead-time compensation in robust model predictive control. *Submetido ao Journal of Process Control*, v. 0, n. 0, p. 0 – 0, 2011.

SANTOS, T. L. M.; NORMEY-RICO, J. E. Dealing with measurement noise in integrative dead-time process. In: *Proceedings of European Control Conference*. Budapeste - Hungria: , 2009.

SANTOS, T. L. M.; NORMEY-RICO, J. E. Robust model predictive controller with terminal weighting for multivariable dead-time processes. In: *Anais do 8o Workshop on Time Delay Systems*. Sinaia - Romênia: , 2009.

SANTOS, T. L. M.; NORMEY-RICO, J. E.; LIMON, D. Explicit input-delay compensation for robustness improvement in MPC. In: *Anais do 9o Workshop on Time Delay Systems*. Praga - República Tcheca: , 2010.

SANTOS, T. L. M.; ROCA, L.; GUZMAN, J. L.; NORMEY-RICO, J. E.; BERENGUEL, M. Practical MPC with robust dead-time compensation applied to a solar desalination plant. In: *A aparecer nos anais do 18o Congresso Mundial do IFAC*. Milão - Itália: , 2011.

SHI, Y.-J.; CHAI, T.-Y.; WANG, H.; SU, C.-Y. Delay-dependent robust model predictive control for time-delay systems with input constraints. In: *Proceedings of the American Control Conference*. St. Louis - Estados Unidos: , 2009.

SHI, Y.-J.; CHAI, T.-Y.; YUE, H. Robust one-step model predictive control for discrete time-delay systems. In: *Proceedings of the XVII IFAC Triennial Congress*. Seoul - Coréia do Sul: , 2008.

SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. *Multivariable feedback control. Analysis and design*. Nova Iorque: Wiley, 2005.

SMITH, O. J. M. Closer control of loops with dead-time. *Chemical Engineering Progress*, v. 53, n. 5, p. 217–219, 1957.

TORRICO, B. C. *Contribuição ao Controle Preditivo Robusto de Sistemas com Atraso*. Tese (Doutorado) — Departamento de Automação e Sistema, UFSC, 2007.

TORRICO, B. C.; NORMEY-RICO, J. E. Controle preditivo de sistemas não-lineares com atraso. In: *XV Congresso Brasileiro de Automática*. Gramado: , 2004.

TORRICO, B. C.; NORMEY-RICO, J. E. 2DOF discrete dead-time compensators for stable and integrative processes with dead-time. *Journal of Process Control*, v. 15, n. 3, p. 341–352, 2005.

TORRICO, B. C.; NORMEY-RICO, J. E. Robust constrained horizon predictive controller for dead-time systems. In: *Proceedings of the XVI IFAC Triennial Congress*. Praga- República Tcheca: , 2005.

TORRICO, B. C.; NORMEY-RICO, J. E. Robust MPC tuning for integrative and unstable processes with dead-time. In: *Anais do XVI Congresso Brasileiro de Automática*. Salvador: , 2006.

TORRICO, B. C.; NORMEY-RICO, J. E. Robust predictive control of drug dosing during anesthesia. In: *European Control Conference*. Budapest - Hungria: , 2007.

TORRICO, B. C.; ROCA, L.; NORMEY-RICO, J. E.; GUZMÁN, J. L.; YEBRA, L. J. Robust nonlinear predictive control applied to a solar collector field in a solar desalination plant. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. In press., v. 18, n. 6, p. 1430 – 1439, Nov. 2010.

WANG, C.; YOUNG, P. Direct digital pole-assignment control system design for multivariable systems based on input-output state variable feedback. In: *International Conference on Control*. Oxford - Inghilterra: , 1988. p. 212–217.

WOOD, R. K.; BERRY, M. W. Terminal composition control of a binary distillation column. *Chem. Eng. Science*, v. 28, n. 1, p. 707–721, 1973.

APÊNDICE A – Estabilidade em MPC

Neste Apêndice será reproduzido, de maneira simplificada, o principal resultado de Mayne et al. (2000). Através dele, pode-se afirmar que se o valor inicial do do estado ($x(0)$) induz a um problema de otimização factível no contexto da estratégia MPC de horizonte finito, então o sistema

$$\begin{aligned}x(k+1) &= f(x(k), u(k)) \\ y(k) &= h(x(k))\end{aligned}$$

é assintoticamente estável ao ser controlado através da estratégia MPC decorrente do problema de otimização porposto.

Para tanto considere o problema

$$\mathcal{P}(x(k)) : \min_{\mathbf{u}(k)} (\{V(x(k), \mathbf{u}(k)) | \mathbf{u}(k) \in \mathcal{U}(x)\})$$

com

$$V(x(k), \mathbf{u}(k)) = \sum_{i=0}^{N-1} L(x(k+i|k), u(k+i|k)) + F(x(k+N|k)). \quad (\text{A.1})$$

Considere ainda que ele atende às condições de estabilidade apresentadas no Capítulo 1. Desta forma, pretende-se demonstrar que a Eq. (A.1) é uma função de Lyapunov. Vale ressaltar que as restrições nos estados preditos, nos controles futuros e no estado terminal são representadas de maneira compacta por $\mathbf{u}(k) \in \mathcal{U}(x)$.

Então considere que para um dado instante k , a sequência ótima é definida por

$$\mathbf{u}^*(k) = [u(k|k) \ u(k+1|k) \ \dots \ u(k+N_u-1|k)]$$

e para $k+1$, a sequência foi convenientemente escolhida para ser

$$\tilde{\mathbf{u}}(k+1) = [u(k+1|k) \ u(k+2|k) \ \dots \ u(k+N_u-1|k) \ \kappa_f(x(k+N|k))].$$

Neste caso, verifica-se que $x(k+i|k) = x(k+i|k+1)$, $i = 1, \dots, N-1$ e portanto,

$$\begin{aligned}V(x(k+1), \tilde{\mathbf{u}}(k+1)) &= V(x(k), \mathbf{u}^*(k)) - L(x(k), u(k)) - F(x(k+N|k)) \\ &\quad + L(x(k+N), \kappa_f(x(k+N|k))) \\ &\quad + F(f(x(k+N|k), \kappa_f(x(k+N|k))))\end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Da condição A4, apresentada no Capítulo 1, verifica-se que

$$[F(f(x(k+N|k), \kappa_f(x(k+N|k)))) - F(x(k+N|k)) + L(x(k+N), \kappa_f(x(k+N|k)))] \leq 0$$

de maneira que, a partir da Eq. (A.2), é possível escrever a desigualdade

$$V(x(k+1), \tilde{\mathbf{u}}(k+1)) < V(x(k), \mathbf{u}^*(k)) - L(x(k), u(k)).$$

Posteriormente, devido o princípio da otimalidade, pode-se concluir que a sequência ótima verificada em $k+1$ ($\mathbf{u}^*(k)$) é de tal forma que

$$V(x(k+1), \mathbf{u}^*(k+1)) < V(x(k+1), \tilde{\mathbf{u}}(k+1)) < V(x(k), \mathbf{u}^*(k)) - L(x(k), u(k))$$

e portanto obtém-se

$$V(x(k+1), \mathbf{u}^*(k+1)) - V(x(k), \mathbf{u}^*(k)) < -L(x(k), u(k)).$$

Com efeito, a função custo é uma função de Lyapunov uma vez que o custo de etapa foi escolhido para atender $L(x(k), u(k)) \geq c \cdot \|x(k), u(k)\|^p$ com $c > 0$ e $p \geq 1$.

Finalmente, deve-se ressaltar que o custo de etapa pode ser utilizado para considerar o erro de saída na forma

$$L(y(k) - y_{ss}, u(k) - u_{ss})$$

com y_{ss} e u_{ss} variáveis de saída e de controle que determinam um ponto de equilíbrio. Note que isto é possível uma vez que se realiza mudanças de coordenadas do tipo $z(k) = y(k) - y_s$ e $v(k) = u(k) - u_s$ o que torna o problema equivalente ao da situação anterior. No entanto, esta consideração só pode ser feita se $y_s = h(f(u_s))$ e que o par (f, h) for detectável.

APÊNDICE B – Relações do filtro primário

A derivada do inverso do filtro primário pode ser obtida a partir de

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{F_p(z)} \right) = \frac{1}{F_p(z)} \left(\frac{\dot{D}_p(z)}{D_p(z)} - \frac{\dot{N}_p(z)}{N_p(z)} \right) = \frac{\gamma(z)}{F_p(z)}$$

com

$$\gamma(z) = \left[\sum_{k=1}^w \frac{1}{(z - p_{pk})} - \sum_{k=1}^v \frac{1}{(z - z_{pk})} \right].$$

Portanto, o seu valor em $z = 1$ pode ser calculado diretamente pela relação

$$\gamma_1 = \left[\sum_{k=1}^w \frac{1}{(1 - p_{pk})} - \sum_{k=1}^v \frac{1}{(1 - z_{pk})} \right]. \quad (\text{B.1})$$

B.1 DERIVADA DO INVERSO DO FILTRO PRIMÁRIO PARA O CASO PASSA BAIXAS.

Como $F_p(z)$ é do tipo passa baixas, para cada zero (z_{pi}) existe ao menos um pólo (p_{pi}) de maneira que

$$\frac{1}{(1 - p_{pi})} \geq \frac{1}{(1 - z_{pi})}, \quad \forall i = 1, \dots, v$$

e portanto,

$$\gamma_1 = \left[\sum_{k=1}^w \frac{1}{(1 - p_{pk})} - \sum_{k=1}^v \frac{1}{(1 - z_{pk})} \right] \geq 0.$$

APÊNDICE C – Relação entre o Preditor Generalizado e Preditor de Smith filtrado

C.1 OBTENÇÃO DO FILTRO DE ROBUSTEZ DO PREDITOR GENERALIZADO

A lei de controle do Preditor Generalizado será reescrita na forma do Preditor de Smith filtrado para analisar algumas características de sua estrutura de predição. No caso do Preditor de Smith filtrado, pode-se obter a seguinte lei de controle a partir da Fig. 12:

$$\begin{aligned} u(k) &= C(z^{-1})[F(z^{-1})r(k) - y_p(k)]; \\ y_p(k) &= S(z^{-1})u(k) + F_r(z^{-1})y(k) \\ &= G_n(z^{-1})u(k) + F_r(z^{-1})[y(k) - G_n(z^{-1})u(k-d)]. \end{aligned} \quad (C.1)$$

A partir deste ponto, o operador z será omitido das funções de transferências pulsadas para simplificar a notação.

Quando se considera a Fig. 18, a saída predita é

$$y_p(k) = F_1[1 - z^{-d_n}F_k]u(k) + F_2[1 - z^{-d_n}F_k]y(k) + F_k y(k). \quad (C.2)$$

A partir da identidade

$$\begin{aligned} (zI - A) \sum_{i=1}^{d_n} A^{i-1} z^{-i} &= I - A^{d_n} z^{-d_n} \Rightarrow \\ \sum_{i=1}^{d_n} A^{i-1} z^{-i} &= (zI - A)^{-1} - (zI - A)^{-1} A^{d_n} z^{-d_n}, \end{aligned}$$

pode-se reescrever a Eq. (2.19) como sendo

$$\begin{aligned} F_1 &= [C(zI - A)^{-1}B - CA^d(zI - A)^{-1}z^{-d_n}B]\Gamma(z) \\ &= (\tilde{G} - \tilde{G}^* z^{-d_n})\Gamma(z) = G - \tilde{G}^* z^{-d_n}\Gamma(z) \frac{\tilde{G}}{\tilde{G}} = G(1 - F_2 z^{-d_n}). \end{aligned}$$

Então, substituindo F_1 na Eq. C.2, obtém-se

$$\begin{aligned} y_p(k) &= G_n(1 - z^{-d_n}F_k)u(k) - F_2 G_n z^{-d_n}(1 - z^{-d_n}F_k)u(k) \\ &\quad + F_2(1 - z^{-d_n}F_k)y(k) + F_k y(k) \\ &= G_n u(k) + [F_2(1 - z^{-d_n}F_k) + F_k]y(k) \\ &\quad - [F_2(1 - z^{-d_n}F_k) + F_k]G_n u(k-d) \end{aligned} \quad (C.3)$$

Finalmente, comparando Eq. (C.1) e (C.3), pode-se concluir que

$$F_r = [F_2(1 - z^{-d_n}F_k) + F_k] = [F_k(1 - z^{-d_n}F_2) + F_2]. \quad (\text{C.4})$$

Consequentemente, a estrutura de controle do Preditor Generalizado pode ser reescrita como a de um Preditor de Smith Filtrado com $F_r(z)$ sendo definido através da Eq. (C.4).

APÊNDICE D – Estabilidade Entrada-Estado (ISS)

D.1 DEFINIÇÕES BÁSICAS

As definições básicas, relacionadas ao conceito de estabilidade entrada-estado, como apresentado em Jiang e Wang (2001), serão brevemente revisitadas a seguir. Para tanto, faz-se necessário estabelecer algumas definições prévias. Uma função $\gamma: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é chamada de função \mathcal{K} caso ela seja contínua, estritamente crescente e $\gamma(0) = 0$. Uma função do tipo $\beta: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é chamada de função \mathcal{KL} se para um valor fixo $t \geq 0$, $\beta(\cdot, t)$ é uma função \mathcal{K} e para cada valor fixo $s \geq 0$, a função $\beta(s, \cdot)$ é decrescente e $\beta(s, \cdot) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Para um sinal limitado em amplitude $w_z(k) \in \mathbb{W}_z \subset \mathbb{R}$, uma sequência finita é representada por $\mathbf{w}_{\mathbf{z}[k-1]} \triangleq \{w_z(0), w_z(1), \dots, w_z(k-1)\}$ e sua norma l_∞ padrão é representada por $\|\mathbf{w}_{\mathbf{z}[k-1]}\|_\infty$

$$\|\mathbf{w}_{\mathbf{z}[k-1]}\|_\infty \triangleq \sup_{k \geq 0} \{|w_z(k)|\}.$$

A estabilidade entrada-estado será discutida para um sistema dado por

$$z(k+1) = f(z(k), w_z(k)). \quad (\text{D.1})$$

Em particular, no caso de sistemas lineares controlados com estratégias não-lineares do tipo $u(k) = \kappa(z(k))$, observa-se da Eq. (D.1), a expressão a seguir

$$f(z(k), w_z(k)) = Az(k) + B\kappa(z(k)) + w_z(k).$$

Deve-se notar que, a evolução até o instante k depende apenas de $z(0)$ e $\mathbf{w}_{\mathbf{z}[k-1]}$ devido à causalidade do sistema em questão. Portanto, com um pequeno abuso de notação, será utilizada a notação

$$\mathbf{z}(k, z(0), \mathbf{w}_{\mathbf{z}[k-1]}) \triangleq z(k)|_{z(0), \mathbf{w}_{\mathbf{z}[k-1]}}$$

para representar a solução da Eq. (D.1) no instante k , dada uma condição inicial e uma determinada realização de perturbações aditivas. A partir destes elementos, pode-se definir estabilidade entrada-estado como segue (JIANG; WANG, 2001).

Definição 1 (Estabilidade Estrada-Estado).

O sistema (D.1) é (globalmente) ISS se existe uma função β tipo \mathcal{KL} e uma função γ , tipo \mathcal{K} de forma que, para cada sequência $\mathbf{w}_{\mathbf{z}}$ e para cada condição inicial $x(0)$, verifica-se que

$$\|z(k, z(0), \mathbf{w}_{\mathbf{z}[k-1]})\| \leq \beta(\|z(0)\|, k) + \gamma(\|\mathbf{w}_{\mathbf{z}[k-1]}\|_\infty)$$

para todo $k \geq 0$.

Em alguns casos, a robustez pode ser assegurada numa vizinhança da origem e/ou para perturbações suficientemente pequenas (LIMON et al., 2010). Este problema também pode ser analisado utilizando a noção de estabilidade entrada estado local.

Definição 2 (Estabilidade Estrada-Estado Local). *O sistema (D.1) é localmente ISS se existem constantes c_1 e c_2 , uma função β tipo \mathcal{KL} e uma função γ tipo \mathcal{K} de forma que, para cada \mathbf{w} com $\|w_z(k)\| \leq c_1$ e para cada condição inicial $x(0)$ com $\|x(0)\| \leq c_2$, verifica-se*

$$\|z(k, z(0), \mathbf{w}_{\mathbf{z}[k-1]})\| \leq \beta(\|z(0)\|, k) + \gamma(\|\mathbf{w}_{\mathbf{z}[k-1]}\|_\infty)$$

para todo $k \geq 0$.

Se o sistema é ISS, então condições iniciais finitas e perturbações limitadas produzem trajetórias limitadas (JIANG; WANG, 2001). Este resultado é trivial em sistemas lineares, mas não é direto no caso de sistemas não-lineares com descontinuidades, a exemplo do que ocorre na presença de restrições.

D.2 ESTABILIDADE ENTRADA-ESTADO PARA O SISTEMA PREDITO

Nesta seção será demonstrada a estabilidade entrada-estado para o sistema original a partir da estabilidade do sistema predito. Por definição, sabe-se que se o sistema predito é ISS, então existem funções γ e β do tipo \mathcal{K} e \mathcal{KL} , respectivamente, de forma que se verifica a desigualdade a seguir

$$\|\tilde{x}(k, \tilde{x}(0), \tilde{\mathbf{w}}_{[k-1]})\| \leq \beta(\|\tilde{x}(0)\|, k) + \gamma(\|\tilde{\mathbf{w}}_{[k-1]}\|_\infty)$$

com

$$\begin{aligned} \tilde{w}(k) &= A^d w(k), \\ e(k+d) &= x(k+d) - \tilde{x}(k) = A^{d-1} w(k) + \dots + w(k+d-1). \end{aligned}$$

Assim, pode-se notar que

$$\begin{aligned}
 ||x(k+d)|| &= ||\tilde{x}(k) + e(k+d)|| \\
 &\leq ||\tilde{x}(k)|| + ||A^{d-1}w(k) + \dots + w(k+d-1)|| \\
 &\leq \beta(||\tilde{x}(0)||, k) + \gamma(||\tilde{\mathbf{w}}_{[k-1]}||_\infty) \\
 &\quad + ||A^{d-1}w(k) + \dots + w(k+d-1)|| \\
 &\leq \beta(||\tilde{x}(0)||, k) + \gamma_2(||\mathbf{w}_{[k+d-1]}||_\infty)
 \end{aligned}$$

sendo γ_2 uma função \mathcal{K} definida como segue

$$\begin{aligned}
 \gamma_2(||\mathbf{w}_{[k+d-1]}||_\infty) &\triangleq \gamma(||A^d \mathbf{w}_{[k-1]}||_\infty) + ||A^{d-1}w(k)|| + \dots + ||w(k+d-1)|| \\
 &\geq \gamma(||\tilde{\mathbf{w}}_{[k-1]}||_\infty) + ||A^{d-1}w(k) + \dots + w(k+d-1)||.
 \end{aligned}$$

Seja β_2 uma função \mathcal{KL} definida por $\beta_2(||\tilde{x}(0)||, k) \triangleq \beta(2||\tilde{x}(0)||, k)$, então verifica-se que

$$\begin{aligned}
 \beta(||\tilde{x}(0)||, k) &\leq \beta(||x(0)|| + ||-e(0)||, k) \\
 &= \beta(||x(0)|| + ||e(0)||, k) \\
 &\leq \beta(2 \max(||x(0)||, ||e(0)||), k) \\
 &= \max(\beta(2||x(0)||, k), \beta(2||e(0)||, k)) \\
 &= \max(\beta_2(||x(0)||, k), \beta_2(||e(0)||, k)) \\
 &\leq \beta_2(||x(0)||, k) + \beta_2(||e(0)||, k) \\
 &\leq \beta_2(||x(0)||, k) + \beta_2(||e(0)||, 0) \\
 &\leq \beta_2(||x(0)||, k) + \sigma(||e(0)||)
 \end{aligned}$$

sendo σ uma função \mathcal{K} definida por $\sigma(||e(0)||) \triangleq \beta_2(||e(0)||, 0)$. De forma similar ao procedimento realizado anteriormente, pode-se definir uma função \mathcal{K} denominada γ_3 como sendo

$$\gamma_3(||\mathbf{w}_{[k+d-1]}||_\infty) \geq \gamma_2(||\mathbf{w}_{[k+d-1]}||_\infty) + \sigma(||A^{d-1}w(k) + \dots + w(k+d-1)||).$$

Desta forma chega-se à expressão

$$||x(k+d)|| \leq \beta_2(||x(k+d)||, k) + \gamma_3(||\mathbf{w}_{[k+d-1]}||_\infty),$$

o que prova estabilidade entrada-estado para o sistema original.

APÊNDICE E – Análise da perturbação predita

E.1 SISTEMA BILINEAR MONOVARIÁVEL COM ATRASO

Assim como nos casos anteriores observa-se, da Eq. (5.44), que a perturbação predita é dada por

$$\tilde{w}(k) = \tilde{x}(k+1) - [A\tilde{x}(k) + B\tilde{v}(k) + Mp(k)]. \quad (\text{E.1})$$

Substituindo Eq. (5.43) em (5.44) para k e $k+1$, obtém-se

$$\begin{aligned} \tilde{w}(k) = & F_r(z^{-1})(x(k+1) - \bar{x}(k+1)) + \bar{x}(k+d+1) \\ & - A\{[F_r(z^{-1})(x(k) - \bar{x}(k)) + \bar{x}(k+d)] - B\tilde{v}(k) - Mp(k)\}. \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Neste caso, simplificando a Eq. (E.2) por meio da igualdade Eq. (5.42), chega-se à expressão a seguir

$$\tilde{w}(k) = F_r(z^{-1})(x(k+1) - \bar{x}(k+1)) - A[F_r(z^{-1})(x(k) - \bar{x}(k))]. \quad (\text{E.3})$$

As Eqs. (4.15) e (5.42) podem ser utilizadas considerando os instantes k e $k+1$ o que resulta em

$$\begin{aligned} \tilde{w}(k) = & F_r(z^{-1})\{Ax(k) + Bv(k) + Mp(k-d) + w(k) \\ & - [A\bar{x}(k) + B\tilde{v}(k) + Mp(k-d)]\} \\ & - A[F_r(z^{-1})(x(k) - \bar{x}(k))]. \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Portanto, partindo da Eq. (E.4), obtém-se a expressão final dada por

$$\tilde{w}(k) = F_r(z^{-1})[w(k-d) + B(x(k-d) - \tilde{x}(k-d))u(k)].$$

APÊNDICE F – Ganho de correção de referência

F.1 PREDITOR ÓTIMO

Considere y_r como sendo a referência desejada. Faz-se necessário obter uma correção de maneira que a referência modificada na forma $y_r^m(k) = y_r - Mw_\infty$ de maneira que, em regime permanente com perturbação constante, a convergência da referência artificial para a modificada ($\tilde{y}_s = y_r^m(\infty)$) assegure a convergência da saída real para a referência desejada ($y_\infty = y_r$).

Para a estratégia proposta verifica-se

$$u = K(\tilde{x} - \tilde{x}_s) + \tilde{u}_s,$$

de maneira que as relações a seguir são observadas em regime permanente

$$\tilde{x}_s = A\tilde{x}_s + B\tilde{u}_s, \quad (\text{F.1})$$

$$\tilde{x}_\infty = A\tilde{x}_\infty + B[K(\tilde{x}_\infty - \tilde{x}_s) + \tilde{u}_s] + A^d w_\infty. \quad (\text{F.2})$$

Assim, subtraindo a (F.1) de (F.2), obtém-se

$$\tilde{x}_\infty - \tilde{x}_s = (A + BK)(\tilde{x}_\infty - \tilde{x}_s) + A^d w_\infty.$$

Ou alternativamente

$$\tilde{x}_\infty = \tilde{x}_s + (I - A - BK)^{-1} A^d w_\infty.$$

Partindo do fato a seguir

$$x_\infty = \tilde{x}_\infty + \sum_{j=1}^d A^{j-1} w_\infty,$$

verifica-se que a relação entre x_∞ e w_∞ é dada por

$$x_\infty = \tilde{x}_s + [(I - A - BK)^{-1} A^d + \sum_{j=1}^d A^{j-1}] w_\infty.$$

Finalmente, pode-se concluir que o efeito da perturbação na saída é dado por Mw_∞ com a matriz M sendo obtida como segue

$$y_\infty = C\tilde{x}_s + \underbrace{C[(I - A - BK)^{-1} A^d + \sum_{j=1}^d A^{j-1}]}_M w_\infty.$$

Desta maneira, o efeito da perturbação Mw_∞ é compensado pela alteração na referência.

F.2 PREDITOR DE SMITH FILTRADO

De maneira análoga ao preditor ótimo, observa-se que em regime permanente as relações a seguir

$$\tilde{x}_s = A\tilde{x}_s + B\tilde{u}_s, \quad (\text{F.3})$$

$$\tilde{x}_\infty = A\tilde{x}_\infty + B[K(\tilde{x}_\infty - \tilde{x}_s) + \tilde{u}_s] + \mathbf{F}_r(1)w_\infty. \quad (\text{F.4})$$

ode maneira que obtém-se

$$\tilde{x}_\infty = \tilde{x}_s + (I - A - BK)^{-1}\mathbf{F}_r(1)w_\infty.$$

Considerando o erro de predição do preditor de Smith filtrado e seguindo os mesmos passos do caso anterior obtém-se a seguinte expressão

$$y_\infty = C\tilde{x}_s + \underbrace{C[(I - A - BK)^{-1}\mathbf{F}_r(1) + (I - \mathbf{F}_r(1))\mathbf{Q}(1)]}_{M}w_\infty.$$

É importante ressaltar que a condição $\mathbf{F}_r(1) = I$ garante que $\tilde{w} = w_\infty$. No entanto, esta condição não é necessária neste algoritmo uma vez que a correção da referência é responsável pela eliminação de erro em regime mesmo para $\mathbf{F}_r(1) \neq I$